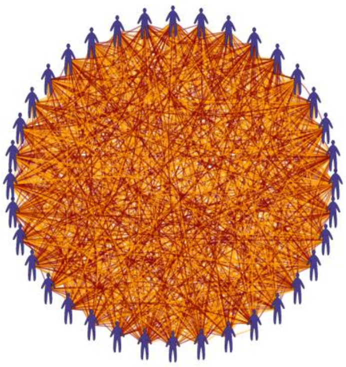
Gruppentrennung als Maßnahme zur signifikanten Reduktion der Verbreitung von Virusinfektionen (eine mathematische Herleitung) – entnommen aus http://rocs.hu-berlin.de/contact-reduction-tutorial/#/ ***- mit kleiner eigenen Ergänzung zur Zahl L_0 = N(N-1)***

Ansteckungsmöglichkeiten in Gruppen

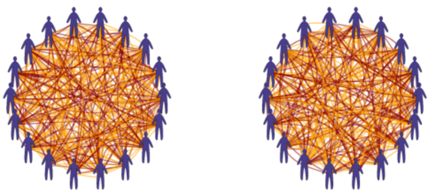


in einer Gruppe
von 36 Personen
gibt es 1260 mögliche
Ansteckungswege

1 Gruppe | 2 Gruppen | 4 Gruppen | 9 Gruppen

Durch **klichen der runden Knöpfe oben** kann die Gruppe von 36 Personenen aufgeteilt werden. Die Linien repräsentieren mögliche Ansteckungswege innerhalb einer Gruppe. Orange und rot unterscheiden die Richtung der Ansteckung. Auf den nächsten Slides ist die Mathematik genauer erklärt.

Ansteckungsmöglichkeiten in Gruppen



in einer Gruppe
von 36 Personen
gibt es 1260 mögliche
Ansteckungswege

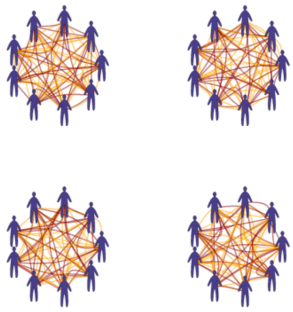
in 2 kleineren Gruppen
von jeweils 18 Personen
gibt es insgesamt nur
2 x 306 = 612
mögliche
Ansteckungswege

**Die Anzahl der Ansteckungswege ist um
51.4% (auf etwa 1/2) reduziert.**

1 Gruppe | 2 Gruppen | 4 Gruppen | 9 Gruppen

Durch **klichen der runden Knöpfe oben** kann die Gruppe von 36 Personenen aufgeteilt werden. Die Linien repräsentieren mögliche Ansteckungswege innerhalb einer Gruppe. Orange und rot unterscheiden die Richtung der Ansteckung. Auf den nächsten Slides ist die Mathematik genauer erklärt.

Ansteckungsmöglichkeiten in Gruppen



in einer Gruppe
von 36 Personen
gibt es 1260 mögliche
Ansteckungswege

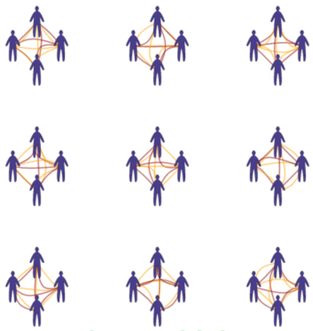
in 4 kleineren Gruppen
von jeweils 9 Personen
gibt es insgesamt nur
4 x 72 = 288
mögliche
Ansteckungswege

Die Anzahl der Ansteckungswege ist um 77.1% (auf etwa 1/4) reduziert.

1 Gruppe | 2 Gruppen | 4 Gruppen | 9 Gruppen

Durch **klichen der runden Knöpfe oben** kann die Gruppe von 36 Personenen aufgeteilt werden. Die Linien repräsentieren mögliche Ansteckungswege innerhalb einer Gruppe. Orange und rot unterscheiden die Richtung der Ansteckung. Auf den nächsten Slides ist die Mathematik genauer erklärt.

Ansteckungsmöglichkeiten in Gruppen



in einer Gruppe
von 36 Personen
gibt es 1260 mögliche
Ansteckungswege

in 9 kleineren Gruppen
von jeweils 4 Personen
gibt es insgesamt nur
9 x 12 = 108
mögliche
Ansteckungswege

Die Anzahl der Ansteckungswege ist um 91.4% (auf etwa 1/9) reduziert.

1 Gruppe | 2 Gruppen | 4 Gruppen | 9 Gruppen

Durch **klichen der runden Knöpfe oben** kann die Gruppe von 36 Personenen aufgeteilt werden. Die Linien repräsentieren mögliche Ansteckungswege innerhalb einer Gruppe. Orange und rot unterscheiden die Richtung der Ansteckung. Auf den nächsten Slides ist die Mathematik genauer erklärt.

In einer Gruppe von N Personen gibt es

$$L_0 = N(N-1)$$

verschiedene, gerichtete Kontakte. “Gerichtet” bedeutet, dass man zwischen einer Übertragung von Person **A** an Person **B** und einer Übertragung von Person **B** an Person **A** unterscheidet. Für das Endergebnis, also die Reduktion der Anzahl von möglichen Transmissionswegen ist das unerheblich. Wir nennen im Folgenden einen Übertragungsweg **“Link”** (englisch: *Verbindung*) weil das einfacher ist.

Haben wir also eine Gruppe von 10 Menschen, gibt es 90 Übertragungsmöglichkeiten.

Teile ich meine ursprüngliche Gruppe in K kleinere Gruppen, dann besteht jede der kleineren Gruppen aus $N_G = N/K$ Personen.

Innerhalb einer der kleinen Gruppen haben wir also

$$L_G = N_G(N_G - 1) = \frac{N}{K}\left(\frac{N}{K} - 1\right)$$

Links. Weiter geht’s auf dem nächsten Slide……

Wie erhalten wir die Zahl $L_0 = N(N-1)$? Dies folgt aus einer elementaren kombinatorischen Überlegung. Angenommen, die Gruppe besteht aus $N \geq 2$ Personen. Wir fragen nun zunächst danach, wieviel mögliche *Paarbildungen* es in dieser Gruppe gibt.

Beispielsweise sei $N = 3$. Die Gruppe werde durch die Menge $\{A, B, C\}$ beschrieben. Dann gibt es in dieser Menge genau $3 = \frac{N(N-1)}{2}$ *zwei*elementige Teil*mengen*; nämlich $\{A, B\} = \{B, A\}, \{B, C\} = \{C, B\}$ und $\{A, C\} = \{C, A\}$. Folglich gibt es insgesamt $6 = 3 \cdot 2 = N(N-1)$ “gerichtete” Kontakte, bzw. Ansteckungswege, was genau der Anzahl aller (geordneten) 2-Tupel $(A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (A, C)$ und (C, A) entspricht. Dabei steht hier beispielsweise das 2-Tupel (A, B) für “A infiziert B” und (B, A) für “B infiziert A”. Allgemein gilt:

Beobachtung. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und $N \geq 2$. Dann gibt es in einer N-elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ genau $\frac{N(N-1)}{2}$ zweielementige Teilmengen. Insbesondere gibt es insgesamt $N(N-1)$ 2-Tupel (a_i, a_j), wobei $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$.*

Beweis. Dies ist ein einfacher Beweis durch Induktion über N.

Induktionsbeginn. Die Behauptung ist für $N = 2$ offensichtlich erfüllt.

Induktionsschritt - von N auf $N+1$. Angenommen die Induktionsbehauptung sei für N erfüllt. Ergänzen wir die N-elementige Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ durch ein weiteres Element a_{N+1}, so gibt es folglich genau N *zusätzliche* zweielementige Teilmengen; nämlich die N Mengen $\{a_{N+1}, a_1\}$, $\{a_{N+1}, a_2\}$, $\ldots$, $\{a_{N+1}, a_N\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also insgesamt

$$N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N + N^2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{(N+1)((N+1)-1)}{2}$$

zweielementige Teilmengen der $(N+1)$-elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}\}$. $\square$

Bemerkung. Natürlich spielt hier der Binomialkoeffizient die Hauptrolle, denn:

$$\binom{N}{2} := \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2} \text{ für alle } N \in \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Allgemeiner gilt der folgende Sachverhalt:
Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $N \geq M$. Dann gilt

$$\binom{N+1}{M} = \binom{N}{M-1} + \binom{N}{M} \quad (\textit{Pascal'sches Dreieck!}).$$

Insbesondere gibt es in einer N-elementigen Menge genau $\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}$ M-elementige Teilmengen.

Link zum Pascal'schen Dreieck

Eine verkleinerte Gruppe hat also

$$L_G = \frac{N}{K}\left(\frac{N}{K} - 1\right)$$

Links. Das können wir auch so schreiben:

$$L_G = \frac{N}{K}\left(\frac{N}{K} - 1\right) = \frac{1}{K^2}\left(\frac{N-K}{N-1}\right) L_0$$

In dem Ausdruck rechts ist ein Faktor $(N-K)/(N-1)$. Dieser Faktor ist in Situationen in denen die Ursprungsanzahl N der Personen viel größer ist als die Anzahl der Gruppen in die geteilt wird (also $N \gg K$) ungefähr 1:

$$(N-K)/(N-1) \approx 1$$

.

Das heißt.....

(da (N-K)/(N-1) = 1 - (K-1)/(N-1))

…wir können schreiben:

$$L_G \approx \frac{1}{K^2} L_0$$

Wenn wir also eine Gruppe von 100 Personen haben und eine andere Gruppe von halb so vielen ($K = 2$) Personen (also 50) dann sind in der kleineren Gruppe nur $1/4$ so viele Links. **Das ist also eine Reduktions um 75%**.

Wenn wir, wie eingangs erklärt, aber eine große Gruppe von N Personen in K kleinere Gruppen teilen, in denen jeweils nur noch L_G Links vorhanden sind, ergibt das für **alle** K kleinen Gruppen insgesamt:

$$L = K \times L_G$$

für die Gesamtzahl von Links, also

$$L = K \times L_G \approx \frac{1}{K} L_0$$

.

das bedeutet….

…wenn man eine Gruppe in K kleinere Gruppen teilt, sinkt die Gesamtanzahl von Kontakten um den Faktor K. Also im oberen Beispiel ($N = 100, K = 2$) um 50%.

Die Beziehung

$$L \approx \frac{1}{K} L_0$$

.

gilt aber nur näherungsweise wenn $N \gg K$ erfüllt ist.

Exakt lautet die Gleichung:

$$L = \frac{1}{K} \left(\frac{N - K}{N - 1} \right) L_0$$

.

Fazit: Gruppenteilen verringert die Transmissionsmöglichkeiten substantiell