Diskrete Modelle in der stochastischen Finanzmathematik

Frank Oertel
Departement T - Mathematik und Physik
Zürcher Hochschule Winterthur ZHW
CH–8401 Winterthur
frank.oertel@zhwin.ch
WS 03/04

Gegenwärtige Version – in Bearbeitung

1 Grundlegende Konzepte und Objekte eines Finanzmarktes

Zunächst wollen wir die entscheidenden Konzepte auf intuitiver Basis bereitstellen.

1.1 Finanzmärkte

Der Begriff *Markt* wird vielseitig verwendet. Wir bezeichnen hier mit diesem Begriff die Gesamtheit von Nachfrage, Angebot und die Realisierung von Vermögensmasse, deren Preis sich aus dem Wechselspiel von Angebot und Nachfrage ergibt. Ein *Finanzmarkt* setzt sich primär aus zwei Teilen zusammen: einem durch die Börse realisierten *Wertpapiermarkt*, bestehend aus Aktien, Bonds und derivativen Finanzinstrumenten und einem *finanziellen Resourcenmarkt* außerhalb des Aktienmarktes (Bankservice, Anleihen, Kredite, derivative Instrumente, die sich nicht aus Aktien oder aus Bonds ableiten).
Teilnehmer eines Finanzmarktes sind Finanzinstitute (Banken, Versicherungen) und Einzelpersonen. Finanzierungsaktivitäten äußern sich in vielfältiger Weise: kaufen, verkaufen, besitzen und ausleihen von Wertpapieren um Dividenden zu erhalten, Allokation von Kapital zur direkten Konsumierung.

1.2 Grundlegende Wertpapiere

Aktien sind *Teilhaberwertpapiere*, welche zu dem Zweck einer Akkumulation des Kapitals emmitiert werden, das für spätere Aktivitäten eingesetzt werden soll. Der Aktienteilhaber[1] oder *Aktionär* einer Firma besitzt sowohl das Recht an der Steuerung der Firma teilzunehmen als auch Gewinnausschüttungen (Dividenden) zu erhalten. Um die Firma zu steuern,

[1] Diese im Skript durchgehend verwendete Form bei Berufstiteln einer Person ist natürlich nur im neutralen Sinne und nicht als Unterscheidungsmerkmal zwischen weiblichem und männlichem Geschlecht zu verstehen.

stellen Aktionäre eine Gruppe von Arbeitnehmern (Personal) ein, deren primäres Ziel darin bestehen soll, ein (möglichst maximales) Wachstum der Aktienpreise zu erzielen.
Bonds, auch *festverzinsliche Wertpapiere* genannt, sind *Schuldpapiere*, welche vom Staat oder von unterschiedlichen Firmen emmitiert werden, um Kapital zu akkumulieren oder eigene Schulden zu regulieren. Im Gegensatz zu Aktien, werden Bonds nur für eine bestimmte endliche Zeitperiode herausgegeben, nach deren Ablauf sie durch Tilgung (Zurückzahlung) aus dem Geldkreislauf entfernt werden. Charakteristische Merkmale eines Bonds sind folgende:

- Fälligkeitstermin (Zeitpunkt der Tilgung)
- Nominalwert (Kosten der Tilgung)
- Auszahlungen bis zum Fälligkeitstermin (Kuponzahlungen).

Ein wesentlicher Indikator der "Qualität" eines Bonds ist sein *bis zum Fälligkeitstermin erzielter Ertrag (yield)*, welcher im wesentlichen dem *Zins* einer Bank entspricht. Die genauere Untersuchung der Bewertung solcher Schuldpapiere und der damit verbundenen Modellierung der *Zinsstruktur(kurve)* ist ein eigenes nicht–triviales Kapitel der stochastischen Finanzmathematik, das erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt wird.

1.3 Derivative Finanzinstrumente

Aktien und Bonds sind *Primärpapiere*, da sie direkt durch ökonomische Faktoren bestimmt werden. Im Gegensatz dazu stehen *derivative Finanzinstrumente (Sekundärpapiere)*, die von den *Basispapieren* (Aktien und Bonds) in "funktioneller Form" abgeleitet sind. Ein großer Vorteil dieser derivativen Finanzinstrumente besteht darin, daß sich damit Investoren mit weitaus geringeren Kosten am Finanzmarkt beteiligen können als es mit den Basispapieren möglich wäre. Insbesondere wird durch die vermehrte Teilnahme von Investoren am Finanzmarkt die *Liquidität des Marktes* erhöht, also sofortiger Kauf und Verkauf von Wertpapieren ermöglicht. Im wesentlichen dienen Derivate zu zwei unterschiedlichen Zwecken:

- zur *Spekulationsinstrument* (zur Erzielung hohen Profits durch Hebelwirkung unter Einkalkulierung eines hohen Verlustes)
- als *Versicherungsvertrag gegen Verlust* (Absicherung durch *Hedging* mittels Portfolioreplikation).

Die wichtigsten und in der Praxis durchwegs verwendeten Derivate sind folgende:

- *Forwards*: Firma A plant, Aktien der Firma B am Ende eines Jahres zu kaufen, möchte sich jedoch dabei gegen einen möglichen Anstieg des Aktienpreises versichern. Dazu schließt Firma A einen Forwardvertrag mit Firma B ab: A verpflichtet sich, die B–Aktien zu einem heute fest vereinbarten Preis zu kaufen, unabhängig davon wie hoch der Kurs der B–Aktie am Ende des Jahres ist.
- *Optionen*: A hat sich Aktien von B gekauft, in der Annahme, durch Anwachsen des Aktienpreises eine Rendite zu einem späteren Zeitpunkt T zu erzielen. Um sich gegen ein mögliches Abfallen des Kurses der B–Aktie zu schützen, kauft sich A bei einer Bank eine *Verkaufsoption*. Diese gibt A das Recht, die B–Aktien zum Zeitpunkt T zu einem

heute fest vereinbarten Preis a zu verkaufen, unabhängig davon, wie hoch der Stand des Kurses der B–Aktie zum Zeitpunkt T ist. Im Gegensatz zum Forward–Vertrag, muß A eine Prämie für dieses Versicherungsinstrument bezahlen – den *Optionspreis*. Die Berechnung eines solchen Optionspreises ist nicht trivial und zentraler Gegenstand dieser Vorlesung.

- *Optionsscheine (warrants)*: Ein Optionssschein ist ein Instrument, das durch eine Firma herausgegeben wird und das seinem Inhaber das Recht erteilt, einen fest bestimmten Anteil von Aktien dieser Firma zu einem heute festgelegten Preis während einer bestimmten zukünftigen Zeitspanne zu kaufen.

- *Wandelanleihe (convertible bond)*: Eine Wandelanleihe ist ein Bond einer Firma, der seinem Besitzer das Recht gibt, diesen während einer bestimmten zukünftigen Zeitspanne gegen einen fest bestimmten Anteil von Aktien dieser Firma zu tauschen.

- *Caps, Collars und Floors*: Hierbei handelt es sich um Optionen, bei denen variabel verzinsliche Schuldverhältnisse durch untere bzw. obere Schranken eingegrenzt werden.

- *Swaps*: Ein Swap ist eine private (außerbörsliche) Vereinbarung zweier Parteien, Geldströme (beispielsweise Zinsverpflichtungen in unterschiedlichen Währungen) zu einem festgelegten zukünftigem Zeitpunkt zu tauschen, um dadurch gemeinsam Vorteile zu erzielen, die jeder für sich allein nicht hätte erlangen können.

Wir konzentrieren uns nun speziell auf Optionen.

Definition (Option): Eine *Option* ist ein Vertrag, der für den Käufer der Option (*Inhaber*)

- das Recht, jedoch nicht eine Verpflichtung beinhaltet,
- eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes oder Basiswertes (*Underlying)*
- vor oder am Ende der *Laufzeit* T
- zu einem im voraus vereinbarten *Ausübungspreis* a zu kaufen (*Call)* oder zu verkaufen (*Put)*.

Ein solches Recht besitzt einen Preis, der auch als *Optionsprämie* bezeichnet wird. Jede Option involviert zwei Vertragspartner: Um eine Option zu kaufen (*long position*), muß jemand diese Option verkaufen (*short position*) und sich verpflichten, die der Option zugrundeliegenden Bedingungen – im Falle der *Ausübung* durch den Inhaber – zu erfüllen. Diesen Verkäufer nennt man auch den *Stillhalter* der Option. Das einzige Risiko des Inhabers besteht im Verlust der Optionsprämie, im Gegensatz zu dem Risiko des Stillhalters ($\rightsquigarrow$ weshalb?).
Vereinbart man eine (mögliche) Ausübung der Option schon während der Laufzeit, so spricht man von einer *amerikanischen Option*. Eine *europäische Option* dagegen, erlaubt nur eine Ausübung am Ende der vereinbarten Laufzeit.
Da das Auszahlungsprofil einer Option eine Funktion des Underlyings ist (bzw. vom Underlying "abgeleitet" wird), ist also jede Option ein *derivatives Finanzinstrument* (auch *Derivat* genannt).

Einige von sehr vielen Optionsbeispielen:

(1) Sie kaufen sich für CHF 1500,– das Recht, Ihre Mietwohnung in einem Jahr zu dem heute vereinbarten Preis von CHF 480000,– zu kaufen. $\rightsquigarrow$ Absicherung gegen steigende Grundstückspreise!

(2) Sie kaufen sich das Recht, 50 XYZ–Aktien (die heute einen Stückpreis von CHF 120,– aufweisen) in 8 Monaten zu einem Stückpreis von CHF 135,– zu verkaufen. $\rightsquigarrow$ Absicherung gegen fallende Aktienkurse!

(3) Ein amerikanischer Rückversicherungskonzern kauft sich bei einer britischen Investmentbank am 1. Januar 2001 das Recht, in 18 Monaten den New Yorker Gesamt–Hagelschadenindex des Jahres 2001 zu einem Preis von \$ 560000,– an diese Bank zu verkaufen. $\rightsquigarrow$ Grund?

(4) Eine CH–Großbank kauft sich am 11. Februar 2001 das Recht, am 4. Oktober 2001 den maximalen Wert, den 600 XYZ–Aktien bis zu diesem Zeitpunkt (über die *gesamte Zeitspanne hinweg*) erzielt haben, zu einem Preis zu kaufen, der am 11. Februar 2001 festgelegt wird. $\rightsquigarrow$ Grund?

Typische Markteilnehmer am Optionenhandel sind:

- "Hedger": beabsichtigen Begrenzung des Risikos durch Einsatz von Optionen
- "Spekulateure": zielen durch Optionengeschäfte auf hohe Gewinnchancen durch bewußtes Eingehen von Risiken
- "Arbitrageure": nutzen Gewinnmöglichkeiten durch zu niedrige oder zu hohe Werteinschätzung aus, ohne dabei Risiken einzugehen.

Zentraler Gegenstand dieser Vorlesung:

Bestimmung der Optionsprämie und des Optionswertes während der Laufzeit unter Verwendung geeigneter mathematischer Modelle, die sinnvolle ökonomische Randbedingungen berücksichtigen! Wir werden erkennen, daß die wesentliche Grundidee in der folgenden Überlegung enthalten ist: Unter der ökonomisch sinnvollen Annahme, daß es keine "Geldmaschine" gibt, ergibt sich (in einem geeigneten Marktmodell) zu jedem Zeitpunkt während der gesamten Laufzeit der Optionswert als der Wert eines Portfolios, bestehend aus Anteilen des Basiswertes und Anteilen eines risikolosen Finanzgutes (eines Bonds). Insbesondere erhalten wir damit als den Optionswert zu Beginn der Handelsperiode als Wert dieses Portfolios zu Beginn.

Beispiel 1: Wir betrachten zunächst einen europäischen Call am Ende der Laufzeit T, dessen Underlying durch eine Aktie gegeben sei. Sei dazu $s^* > 0$ der Wert der Aktie zur Zeit T und $K > 0$ der festgelegte Ausübungspreis. Welchen Wert $c(s^*)$ besitzt dann dieser Call zur Zeit T für den Inhaber? Bezeichnet c_0 die gezahlte Optionsprämie und gehen wir von einer stetigen Verzinsung im Zeitintervall $[0, T]$ aus, mit festem (stetigen) Zinssatz $r > 0$, so ergibt sich die Bilanz für den Optionsinhaber als:

$$c(s^*) = (s^* - K)^+ - \exp(rT) \cdot c_0 = \max\{0, s^* - K\} - \exp(rT) \cdot c_0$$

($\rightsquigarrow$ weshalb? Zeichnen Sie dazu den Graphen der Funktion $s^* \mapsto c(s^*)$!). Folglich ergibt sich für den Stillhalter die Bilanz als $-c(s^*)$; dieser kann einen sehr hohen Verlust beinhalten.

Übung 1: Geben Sie aus Inhaberperspektive den Endwert eines europäischen Puts an und zeichnen Sie das dazugehörige Auszahlungsprofil.

Natürlich ist bei der mathematischen Beschreibung geeigneter Optionspreismodelle zu berücksichtigen, daß die zeitliche Entwicklung des Basiswertes bis zum Ende der Laufzeit vielfältigen zufälligen Gegebenheiten unterliegt, so daß hier also die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Modellierung verwendet wird. Beginnen wir mit einem sehr einfachen (und natürlich unrealistischen) Modell, das jedoch schon sehr viele Strukturen erkennen läßt, die sich später in den komplizierteren stetigen Modellen widerspiegeln.

2 Bewertung derivativer Finanzinstrumente im Ein–Perioden–Modell

2.1 Modellrahmen

Ein Markt im Ein–Perioden–Modell (EPM) basiert auf folgenden Daten:

- Einer Handelsperiode zwischen zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$. Handel und Konsum der Investoren findet *nur* zu diesen zwei Zeitpunkten statt, wobei $t = 0$ den Zeitpunkt bezeichnet, zu dem die Preise der zu handelnden Finanzgüter bekannt sind und zu dem die Kombination dieser Güter (das *Portfolio*) zusammengestellt wird. $t = 1$ beschreibt den zukünftigen Zeitpunkt, in dem sich der Wert des Portfolios aus der zufälligen Preisentwicklung der einzelnen Finanzgüter ergibt.

- Einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit σ–Algebra $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und endlicher Stichprobenmenge $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ $(K \in \mathbb{N})$. Hierbei stellt jedes $\omega \in \Omega$ einen möglichen Zustand der Welt dar, der zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht bekannt ist, jedoch zum Zeitpunkt $t = 1$ keinem Zufall mehr unterliegt. $\mathbb{P}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ $\forall \omega \in \Omega$.

- Einer Menge $\{S_t : t \in \mathcal{T}\}$ von Vektoren $S_t = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^N)^\top, N \in \mathbb{N}$, wobei $\mathcal{T} = \{0, 1\}$ und S_t^n den Preis des n–ten Finanzgutes zur Zeit $t \in \mathcal{T}$ bezeichnet. Der Preisvektor $S_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ ist den Investoren momentan (zur Zeit $t = 0$) bekannt, im Gegensatz zu $S_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, dem Zufallsvektor der Finanzgutpreise[2] zur Zeit $t = 1$, die momentan nicht bekannt sind. Dabei sei *zusätzlich* unter gegebenem Zinssatz $\rho > 0$ S_t^0 ein risikoloses Finanzgut (Zero–Bond), mit $S_0^0 = 1$ und $S_1^0 = 1 + \rho$.

[2]Ein Finanzgut kann auch durch ein Portfolio repräsentiert sein. Daher sind negative Preise $S_t^n \leq 0$ nicht von vornherein ausgeschlossen ($\rightarrow$ "Leerverkauf").

Beispiel 2 (Bond und eine Aktie). Sei $N = 1$. Wir betrachten eine festverzinsliche Anlage mit Verzinsung $\rho > 0$, die 1 GE zur Zeit $t = 0$ wert ist und eine Aktie mit bekanntem Kurs $A_0 > 0$ zur Zeit $t = 0$; also

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ A_0 \end{pmatrix}, \, S_1 = \begin{pmatrix} 1+\rho \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

Dabei seien nur eine Aufwärtsbewegung und eine Abwärtsbewegung der Form

$$A_1 = \begin{cases} uA_0 & : \text{ mit W'keit p} \\ dA_0 & : \text{ mit W'keit 1-p} \end{cases}$$

mit Konstanten $0 < d < 1 < u$ möglich ($0 < p < 1$). Als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ setzen wir hier $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ und $\mathbb{P}(\{1\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{0\})$. Der Aktienpreis zum Zeitpunkt $t = 1$ werde modelliert durch die ZVe $A_1(\omega) := A_0 \cdot \xi_1(\omega)$ ($\omega \in \Omega$), wobei

$$\xi_1(\omega) := \begin{cases} d & : \text{ falls } \omega = 0 \\ u & : \text{ falls } \omega = 1 \end{cases} .$$

Eine *Handelsstrategie* im EPM–Markt ist ein Vektor $H = (H^0, ..., H^N)^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$, der die Anteile des Portfolios aus den Finanzgütern beschreibt, die momentan – zur Zeit $t = 0$ – von einem Investor ausgewählt werden und *unverändert bis zum Ende des Handelszeitraumes* ($t = 1$) *beibehalten werden* (beispielsweise 5 Bonds, 3 Aktien und 1 Call). Negative Anteile sind in einer Handelsstrategie durchaus erlaubt; man spricht hier vom *Leerverkauf* (auch *short selling* genannt)!

Was jedoch bedeutet "Leerverkauf"?

Mit dieser Form eines Handelsabschlusses bezeichnet man den Verkauf eines Finanzgutes, das der Verkäufer noch gar nicht besitzt. Ein triviales Beispiel eines solchen Leerverkaufs ist beispielsweise der Verkauf eines Fahrzeugs, das in der gewünschten Kunden–Version noch gar nicht beim Autohändler vorliegt. Oder stellen wir uns vor, Frau Alpha leiht sich Orangen von Herrn Beta. Herr Beta möchte dafür jedoch in einer Woche die gleiche Menge Orangen und 1 Franken als Leihgebühr zurückerhalten. Sogleich verkauft Frau Alpha die geliehenen Orangen an Frau Gamma zu CHF $12,-$. Einige Tage später gelingt es ihr, im Nachbarort die gleiche Menge Orangen für 9 Franken zu kaufen. Sofort geht sie zu Herrn Beta, liefert diese Orangen ab und bezahlt ihm den vereinbarten Franken Leihgebühr. Folglich hat die gerissene Frau Alpha durch den Leerverkauf der Orangen einen Gewinn von $2 = 12 - 9 - 1$ Franken erwirtschaftet. Doch nun zurück zu unserem EPM!

Zu gegebener Handelsstrategie H wird der *Wertprozeß* $\{V_t(H) : t = 0, 1\}$ des Finanzgut–Portfolios definiert durch

$$V_t(H) := \sum_{n=0}^{N} H^n S_t^n = H^\top S_t = \langle H, S_t \rangle, \quad (t \in \{0, 1\}).$$

Das heisst:

$$V_t(H)(\omega) := \sum_{n=0}^{N} H^n \cdot S_t^n(\omega) = H^\top S_t(\omega) = \langle H, S_t(\omega) \rangle \;\; \forall \omega \in \Omega \, .$$

Hierbei ist zu beachten, daß $V_1(H) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable ist, die von der Wahl der Handelsstrategie H abhängt. Da sich Gewinne bzw. Verluste stets als Differenzen zeitlich unterschiedlicher Positionen ergeben, führen wir hier eine wichtige und suggestive Notation ein, die wir durchgehend in dieser Vorlesung verwenden werden

Notation: Seien $T \in \mathbb{N}$, V ein beliebiger Vektorraum, und sei ein beliebiger Vektor $x = (x_0, ..., x_T)^\top \in V^{T+1}$ gegeben ($T+1$ werde hier als die gesamte Anzahl von Zeitpunkten interpretiert). Dann setzen wir $\Delta x_t := x_t - x_{t-1} \in V \quad (t = 1, ..., T)$.

Wenden wir diese Notation auf das EPM an ($V = \mathbb{R}^{N+1}$ und $T = 1$), so ergibt sich bei gegebener Handelsstrategie H der Gewinn (Verlust wird dabei als negativer Gewinn betrachtet) als die Differenz

$$V_1(H) - V_0(H) = \langle H, S_1 \rangle - \langle H, S_0 \rangle = \langle H, \Delta S_1 \rangle = \sum_{n=0}^{N} H^n \Delta S_1^n.$$

Vom finanzmathematischen Gesichtspunkt aus gesehen, ergibt die Differenz $V_1(H) - V_0(H)$ jedoch keinen Sinn, da zukünftige Finanzgutpreise zur Zeit $t = 1$ nicht mit momentanen Finanzgutpreisen zur Zeit $t = 0$ verglichen werden können. Folglich müssen wir die zukünftigen Finanzgutpreise S_1^n diskontieren, um den momentanen Preis zu erhalten, insgesamt also den *diskontierten Preisprozeß* $\{\widetilde{S}_t : t = 0, 1\}$ untersuchen, wobei $\widetilde{S}_t := (\widetilde{S}_t^0, ...\widetilde{S}_t^N)^\top$, mit

$$\widetilde{S}_t^n := S_t^n / S_t^0 \qquad (n = 0, 1, ..., N;\ t = 0, 1).$$

Insbesondere[3] ist $\widetilde{S}_t^0 = 1$ für alle $t \in \{0, 1\}$ und damit $\Delta \widetilde{S}_1^0 = \widetilde{S}_1^0 - \widetilde{S}_0^0 = 0$.

Erinnerung (Diskontieren): Die finanzmathematische Bedeutung des Diskontierens ist folgende: Damit ein Investor $x > 0$ CHF zum Zeitpunkt $t = 1$ erhält, muß er dafür zum Zeitpunkt $t = 0$ für x/S_1^0 CHF einen *Coupon–Bond kaufen*, dessen Coupon mit $\rho = (100\rho)\%$ verzinst ist:

- $t = 0$: Kaufe einen Coupon–Bond für x/S_1^0 CHF
- $t = 1$: Erhalte $x/S_1^0 + \rho \cdot x/S_1^0 = x/S_1^0 \cdot (1 + \rho) = x$ CHF.

Also entspricht bei dem Zinssatz ρ der Wert von x CHF zu $t = 1$ dem Wert von $x/S_1^0 = x/(1 + \rho)$ CHF zum Zeitpunkt $t = 0$.

Folglich ergibt sich bei gegebener Handelsstrategie H der *diskontierte Wertprozeß* $\{\widetilde{V}_t(H) : t = 0, 1\}$ zu

$$\widetilde{V}_t(H) := V_t(H)/S_t^0 = H^0 + \sum_{n=1}^{N} H^n \widetilde{S}_t^n = \sum_{n=0}^{N} H^n \widetilde{S}_t^n = H^\top \widetilde{S}_t = \langle H, \widetilde{S}_t \rangle, \quad (t \in \{0, 1\})$$

(also insbesondere $\widetilde{V}_0(H) = V_0(H)$) und erhalten den *Gewinn:*

$$G_1(H) := \widetilde{V}_1(H) - \widetilde{V}_0(H) = \langle H, \widetilde{S}_1 \rangle - \langle H, \widetilde{S}_0 \rangle = \langle H, \Delta \widetilde{S}_1 \rangle \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{N} H^n \Delta \widetilde{S}_1^n.$$

[3] Mit anderen Worten: Man wählt den Bond S^0 als diejenige Maßeinheit, mittels der man dann die anderen Finanzgüter $S^1, ..., S^N$ ausdrückt (*Numeraire*).

Der Gewinn $G_1(H)$ hängt also *nicht von dem Anteil* H^0 *ab*, der in das risikolose Instrument S^0 investiert wurde, sondern nur von den Anteilen $H^1, ..., H^N$, die in die risikobehafteten Positionen $S^1, ..., S^N$ investiert wurden:

$$G_1(\begin{pmatrix} H^0 \\ \overline{H} \end{pmatrix}) = \sum_{n=1}^{N} H^n \Delta \widetilde{S}_1^n = G_1(\begin{pmatrix} L^0 \\ \overline{H} \end{pmatrix}) \ \ \forall H^0, L^0 \in \mathbb{R} \, \forall \overline{H} \in \mathbb{R}^N.$$

Damit ist der Wert $\widetilde{V}_1(H)$ bereits vollständig durch die Anfangsinvestition und durch die Positionen in den risikobehafteten Finanzgütern bestimmt, denn:

Übung 2: Seien $H^1, ..., H^N \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, daß es einen eindeutig bestimmten Wert $\overline{H}^0 \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\alpha = V_0((\overline{H}^0, H^1, ..., H^N)^\top).$$

Sei

$$\mathcal{V}_1 := \{\widetilde{V}_1(H) : H \in \mathbb{R}^{N+1}\}$$

die Menge aller diskontierten Portfoliowerte zum Zeitpunkt $t = 1$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{V}_1 = \{\alpha + \sum_{n=1}^{N} H^n \Delta \widetilde{S}_1^n : \alpha \in \mathbb{R}, \, H^1, ..., H^N \in \mathbb{R}\}.$$

Lösung: ist in der Quelldatei versteckt ... :-(

Da wir gegenwärtig nur das EPM betrachten, setzen wir im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise $G(H) := G_1(H)$.

Beispiel 3 (Fortsetzung von Bsp. 2): Setzen wir in Beispiel 2 $\rho = 1/9$, $A_0 = 5$, $u = 4/3$ und $d = 8/9$, dann ist

$$\widetilde{S}_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_1)/(1+\rho) = dA_0/(1+\rho) = 4$$

und

$$\widetilde{S}_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_2)/(1+\rho) = uA_0/(1+\rho) = 6.$$

Bei gegebener Handelsstrategie $H = (H^0, H^1)^\top \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$V_0(H) = \left\langle \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\rangle = H^0 + H^1 A_0$$

und

$$V_1(H) = \left\langle \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\rho \\ A_1 \end{pmatrix} \right\rangle = (10/9)H^0 + H^1 A_1;$$

also $V_0(H) = H^0 + 5H^1$, $V_1(H)(\omega_1) = (10/9)H^0 + (40/9)H^1$ und $V_1(H)(\omega_2) = (10/9)H^0 + (20/3)H^1$. Des weiteren ergibt sich analog $\widetilde{V}_1(H)(\omega_1) = H^0 + 4H^1$ und $\widetilde{V}_1(H)(\omega_2) = H^0 + 6H^1$. Also: $G(H)(\omega_1) = -H^1$ und $G(H)(\omega_2) = H^1$. □

Beispiel 4: Ergänzend zu den Daten des Beispiels 2, sei nun $K = 3$, so daß wir also nun von dem Stichprobenraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ausgehen. Dabei setzen wir $S_1^1(\omega_3) := 10/3$, womit $\widetilde{S}_1^1(\omega_3) = 3$.

Übung 3: Bestimmen Sie in Beispiel 4 für beliebige Handelsstrategien H den diskontierten Gewinn bzw. Verlust $G(H)$ in jedem Zustand $\omega \in \Omega$!

Obwohl wir unser Modell in Beispiel 2 "nur" um einen weiteren Zustand ω_3 erweitert haben, werden wir später erkennen, daß die Struktur unseres Modelles grundlegend geändert wurde. Wir behandeln nun den fundamentalen Begriff der *Arbitrage* und des *No–Arbitrage–Prinzips*.

2.2 Das No–Arbitrage–Prinzip

Als *Arbitrage* bezeichnen wir einen risikolosen Profit beim Handel mit Finanzgütern, z.B. beim Handel mit Aktien. Die Möglichkeit eines solchen risikolosen Profits bezeichnen wir als *Arbitragemöglichkeit*, und ein Marktteilnehmer, der auf der Suche nach risikolosem Profit ist, bezeichnet man als *Arbitrageur*. Betrachten wir dazu ein typisches Beispiel:

Eine Aktie werde sowohl in New York als auch in Zürich gehandelt. In New York betrage der Kurs der Aktie 100 \$ und in Zürich 150 CHF. Der Wechselkurs betrage CHF 1.52 pro Dollar (m.a.W.: 1 \$ = 1.52 CHF). Dann liegt folgende Arbitragemöglichkeit vor:

- Kaufe 100 Aktien in Zürich (also bezahle: $-150 \cdot 100$ CHF)
- Verkaufe all diese Aktien in New York (also erhalte: $100 \cdot 100$ \$)
- Wechsle Dollar in Schweizer Franken

Folglich erhält man durch diese Transaktion – ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten – einen risikolosen Profit von $100 \cdot (-150 + 100 \cdot 1.52) = 200$ CHF.

Die Transparenz des Marktgeschehens führt dazu, daß eine solche Arbitragemöglichkeit nur für sehr kurze Zeit bestehen kann. Das Erkennen einer solchen führt nämlich zu gesteigerter Nachfrage der obigen Aktien in Zürich, wodurch deren Kurs ansteigt und zu erhöhter Aktienabgabe in New York, was den dortigen Kurs entsprechend fallen läßt, so daß die Arbitragemöglichkeit verschwindet. In einem idealisierten Finanzmarkt können wir somit ausgehen, daß dort keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Betrachten wir in einem solchen Finanzmarkt derivative Finanzinstrumente oder sonstige Finanzgüter, so ist deren Preisfestsetzung so durchzuführen, daß keine Arbitrage entsteht. Dies bezeichnet man als das *No–Arbitrage–Prinzip* (NAP). Um jedoch ein richtiges Verständnis dieser äußerst wichtigen und grundlegenden Prinzipien der modernen Finanzmathematik zu erlangen, müssen wir diese ökonomischen Begriffe in einen geeigneten mathematischen Rahmen betten:

Definition (Arbitragestrategie im EPM): Eine Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ heißt *Arbitragestrategie*, falls gilt

(i) $V_0(H) = 0$

(ii) $V_1(H)(\omega) \geq 0 \ \ \forall \omega \in \Omega$

(iii) $\mathbb{E}(V_1(H)) > 0$

Ein EPM–Markt heißt *arbitragefrei* bzw. *erfüllt das No–Arbitrage–Prinzip* (NAP), falls keine Arbitragestrategie existiert.

Auf diese Weise wird mittels einer solchen Handelsstrategie eine "Geldmaschine" konstruiert: Man startet mit 0 GE und erhält die Möglichkeit eines strikt positiven Portfoliowerts, ohne dabei (in irgendeinem Zustand der Welt) das Risiko einer Verlustposition einzugehen! Offensichtlich ist H genau dann eine Arbitragestrategie, falls gilt:

(i) $\widetilde{V}_0(H) = 0$

(ii) $\widetilde{V}_1(H)(\omega) \geq 0 \;\; \forall \omega \in \Omega$

(iii) $\mathbb{E}(\widetilde{V}_1(H)) > 0$.

Sei H eine Arbitragestrategie. Was bedeutet die Existenz dieser Arbitragestrategie für den Gewinn $G(H) = \widetilde{V}_1(H) - \widetilde{V}_0(H)$? Wir erkennen dann, daß

(a) $G(H)(\omega) \geq 0 \;\; \forall \omega \in \Omega$

(b) $\mathbb{E}(G(H)) > 0$.

Sei nun umgekehrt $H = (H^0, H^1, ..., H^N)^\top$ eine beliebige Handelsstrategie, die (a) und (b) erfülle, dann läßt sich daraus folgendermaßen – unabhängig von H_0 – eine Arbitragestrategie $\widehat{H} := (\widehat{H}^0, H^1, ..., H^N)^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$ konstruieren. Wegen (a) gilt: $0 \leq G(H) = (-\sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_0^n) + \sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_1^n$. Setzen wir also $\mathbb{R} \ni \widehat{H}^0 := -\sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_0^n$, so folgt nach Konstruktion $\widetilde{V}_0(\widehat{H}) = 0$, also $\widetilde{V}_1(\widehat{H}) = G(\widehat{H}) + \widetilde{V}_0(\widehat{H}) \stackrel{!}{=} G(H) + \widetilde{V}_0(\widehat{H}) = G(H) \geq 0$ und (wegen (b)) $\mathbb{E}(\widetilde{V}_1(\widehat{H})) > 0$. Wir können somit festhalten:

Satz: Genau dann gibt es eine Arbitragestrategie in dem EPM–Markt, falls es einen Vektor $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ gibt, so daß $G(H)(\omega) \geq 0 \;\; \forall \omega \in \Omega$ und $\mathbb{E}(G(H)) > 0$. In diesem Falle wird eine Arbitragestrategie gegeben durch $(\widehat{H}^0, H^1, ...H^N)^\top$, wobei $\widehat{H}^0 = -\sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_0^n$.

Mit anderen Worten (Übung!):

Satz: Der EPM–Markt ist genau dann arbitragefrei, falls für jede Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $G(H) \geq 0$ bereits gilt, daß $G(H) = 0$.

Beispiel 5 (Fortsetzung von Bsp. 2): Mit den obigen Parametern $\rho = 1/9$, $A_0 = 5$, $u = 4/3$ und $d = 8/9$ errechneten wir für jede Handelsstrategie $H = (H^0, H^1) \in \mathbb{R}^2$ einen Gewinn von $G(H)(\omega_1) = -H^1$ im Zustand ω_1 und $G(H)(\omega_2) = H^1$ im Zustand ω_2. Ist also $G(H)(\omega) \geq 0 \; \forall \omega \in \Omega$, folgt $H^1 = 0$ und somit $G(H) = 0$. Also gilt in diesem EPM–Markt das NAP.

Übung 4* (Fortsetzung von Bsp. 2): Zeigen Sie für die allgemeine Version des Beispiels 2, daß das No–Arbitrage–Prinzip *genau dann* erfüllt ist, falls $d < 1 + \rho < u$!

Lösung: Sei $H = \binom{H^0}{H^1}$ eine beliebige Handelsstrategie. Man sieht sofort, daß

$$G(H)(\omega) = H^1 \cdot (\widetilde{S}_1^1(\omega) - A_0) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Also erhalten wir (nach Definition des Modells) $G(H)(\omega_1) = H^1 A_0 \cdot f(d)$ und $G(H)(\omega_2) = H^1 A_0 \cdot f(u)$, wobei $f(x) := (\frac{x}{1+\rho} - 1)$. Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}(G(H)) = H^1 A_0 \cdot (p \cdot f(u) + (1-p) \cdot f(d)).$$

Ist $d < 1 + \rho < u$ und (in jedem Zustand) $G(H) \geq 0$, so folgt sofort $f(d) < 0 < f(u)$ und damit $H^1 A_0 = 0$. Ergo: $G(H) = 0$. Also ist die Bedingung $d < 1 + \rho < u$ hinreichend für die Gültigkeit des NAPs. Zum Beweis der Notwendigkeit dieser Bedingung, sei $1 + \rho \leq d$ oder $1 + \rho \geq u$. Falls $1 + \rho \leq d$, dann ist $f(d) \geq 0$ und (wegen $d < u$) $f(u) > 0$. Also erhalten wir in diesem Falle z.B. mit $H = \binom{1}{A_0}$ eine Arbitragestrategie (da $\mathbb{E}(G(H)) > 0$). Falls $1+\rho \geq u$, dann folgt $f(d) < 0$ und $f(u) \leq 0$. Also wäre in diesem Falle $\binom{1}{-A_0}$ eine Arbitragestrategie.
$\square$

Ebenso fundamental und wichtig für die gesamte stochastische Finanzmathematik (einschließlich der Bewertung von derivativen Finanzinstrumenten) ist

Das Prinzip des eindeutigen Preises im EPM–Markt: *Seien zwei unterschiedliche Finanzgüterportfolios gegeben, mit Preisprozessen* $\{V_t : t = 0, 1\}$ und $\{W_t : t = 0, 1\}$, *deren Werte* V_1 und W_1 *im zukünftigen Zeitpunkt* $t = 1$ *in jedem Zustand übereinstimmen. Es gelte das NAP. Dann muß bereits gelten:*

$$V_0 = W_0.$$

Heuristische Begründung: Angenommen, es sei $V_0 > W_0$. Wir wollen dann eine Arbitragemöglichkeit konstruieren. Wir nehmen an, daß Leerverkauf möglich sei. Dann kann ein Händler, der beide Finanzgutportfolios nicht besitzt, folgende Transaktion vornehmen:

- Leihe (!) zum Zeitpunkt $t = 0$ Finanzgut 1.
- Verkaufe FG 1 zum Zeitpunkt $t = 0$ zum Preis von V_0.
- Kaufe FG 2 zum Zeitpunkt $t = 0$ zum Preis von W_0.
- Lege den so erhaltenen Betrag von $V_0 - W_0$ risikolos an, mit Zinssatz $\rho > 0$ und Verfallszeitpunkt $t = 1$.
- Kaufe FG 1 zum Zeitpunkt $t = 1$ zum Preis von V_1.
- Verkaufe FG 2 zum Zeitpunkt $t = 1$ zum Preis von W_1.
- Gebe FG 1 dem Gläubiger wieder zurück.

Folglich ist die Handelsposition zum Zeitpunkt $t = 1$ die gleiche wie zu Beginn, und dem Händler bleibt (in jedem Zustand) zum Zeitpunkt $t = 1$ ein Gewinn von

$$(1 + \rho) \cdot (V_0 + (-W_0)) + (-V_1) + W_1 = (1 + \rho) \cdot (V_0 + (-W_0)) > 0.$$

Also wird unter der Annahme $V_0 > W_0$ durch eine solche Transaktion eine Arbitragemöglichkeit erzeugt.

Einen direkten (und formalen) Beweis liefert uns auch die Anwendung des vorherigen Satzes auf die Finanzgüter $S_t^1 := V_t$ und $S_t^2 := W_t$ $(t \in \{0,1\})$. Angenommen, die Behauptung sei falsch, und es gelte o.B.d.A. $V_0 > W_0$. Zunächst erhalten wir für jede Handelsstrategie $H = (H^0, H^1, H^2)^\top \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} G(H) &= H^1(\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_0) + H^2(\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0) \\ &= H^1\widetilde{V}_1 + H^2\widetilde{W}_1 + (-H^1)\widetilde{V}_0 + (-H^2)\widetilde{W}_0 \end{aligned}$$

Setzen wir also z.B. $H^2 := 1$ und $H^1 := -H^2 = -1$, dann ergibt sich aus der Voraussetzung $\widetilde{V}_1 = \widetilde{W}_1$ und aus der Annahme $V_0 > W_0$, daß $G(H) = H^2 \cdot (\widetilde{V}_0 - \widetilde{W}_0) > 0$. Also ist jede Strategie des Typs $(H^0, -1, 1)^\top$ eine Arbitragestrategie. $\square$

2.3 Risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße und derivative Finanzinstrumente im EPM

Uns stehen nun die ersten fundamentalen Bausteine der stochastischen Finanzmathematik zur Verfügung, um die Bewertung von Optionen verständlich zu machen. Dazu müssen wir den Optionsbegriff in den formalen Rahmen des EPMs stellen:

Definition (Derivative Finanzinstrumente im EPM): Ein *derivatives Finanzinstrument (Derivat, Claim)* im EPM ist jede Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die ein Auszahlungsprofil zur Zeit $t = 1$ darstellt.

Beispiele:

- Sei $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, dann wird durch

  $$X(\omega) := f(S_1^1(\omega), ..., S_1^N(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

  ein DF im EPM definiert.

- Ein typisches Beispiel eines solchen derivativen Finanzinstrumentes ist

  $$X(\omega) := (S_1^1(\omega) - K)^+ = \max\{0, S_1^1(\omega) - K\}$$

  (Auszahlungsprofil eines "Europäischen Calls" mit Underlying $\{S_t^1 : t = 0,1\}$ im Zustand ω und Ausübungspreis ("strike") $K > 0$),

- oder

  $$Y(\omega) := S_1^1(\omega) - \min\{S_0^1, S_1^1(\omega)\}$$

  (Auszahlungsprofil eines "Lookback–Calls").

Wir zielen nun auf die folgende Fragen: *Welchen Wert besitzt ein DF, dessen Auszahlungsprofil zur Zeit $t = 1$ den Wert $X(\omega)$ im Zustand ω aufweist, momentan zum Zeitpunkt $t = 0$? Ist ein solcher Wert eindeutig bestimmt oder nicht?* Mit anderen Worten: *Gibt es einen fairen Preis von X, so daß sowohl der Käufer als auch der Verkäufer des Kontraktes X damit zufrieden sind, und ist ein solcher Preis eindeutig bestimmt?*

Man ist geneigt, anzunehmen, daß ein solcher Preis von den jeweiligen Risikopräferenzen bzw. von der jeweiligen Markteinschätzung (also von dem jeweiligen *subjektiven* Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$) abhängig ist. Gilt also

$$\text{Preis}(X) = \mathbb{E}_{\boxed{\mathbb{P}}}(X/S_1^0) \quad ???$$

Genau dies jedoch ist nicht der Fall! Wir greifen dazu die berühmte Grundidee von Black und Scholes auf (die 1997 mit dem Nobelpreis gewürdigt wurde) und zeigen, daß – unter Annahme des NAPs – sich oftmals ein eindeutig bestimmter und fairer Preis des Kontraktes X zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt, der *unabhängig* ist von den Risikopräferenzen derjenigen Parteien, die X kaufen bzw. verkaufen. Dazu benötigen wir den wichtigsten Begriff der stochastischen Finanzmathematik, nämlich den des *risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes:*

Definition (Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß im EPM): Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der dem EPM zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω heißt *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $Q(\{\omega\}) > 0 \;\; \forall \omega \in \Omega$

(ii) $\mathbb{E}_Q(\Delta \widetilde{S}_1^n) = 0 \;\; \forall n = 1, 2, ..., N.$

Da $\widetilde{S}_0^n$ keine ZVe ist, folgt unmittelbar, daß Bedingung (ii) äquivalent zu der folgenden Bedingung ist:

$$\widetilde{S}_0^n = \mathbb{E}_Q(\widetilde{S}_1^n) = \sum_{k=1}^{K} \widetilde{S}_1^n(\omega_k) \cdot Q(\{\omega_k\}) \;\; \forall n = 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

Weshalb heißen solche Wahrscheinlichkeitsmaße *risikoneutral*? Dazu betrachten wir für fest gewähltes $n \in \{1, 2, \ldots N\}$ den risikolosen Zerobond S^0 mit konstantem ("risikolosem") Zinssatz $\rho > 0$ und das risikobehaftete Asset S^n. Zur Zeit $t = 0$ habe der Bond den Wert S_0^0 und das Asset den Wert S_0^n. Betrachten wir nun die stochastische Entwicklung beider Instrumente bis zum zukünftigen Zeitpunkt $t = 1$, dann erhalten wir für den Zerobond den Wert $S_1^0 = (1 + \rho) \cdot S_0^0$ und analog für die Aktie den Wert $S_1^n \stackrel{!}{=} (1 + R_1^n) \cdot S_0^n$, wobei die Zufallsvariable (!)

$$R_1^n := \tfrac{S_1^n - S_0^n}{S_0^n}$$

die *Ertragsrate* ("return") des Assets S^n bezeichnet. Da offensichtlich $\rho = (S_1^0 - S_0^0)/S_0^0$, können wir die Ertragsrate auch als stochastischen Zinssatz interpretieren.

Ist nun Q ein beliebiges risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß, dann gilt also nach Definition die Gleichheit (1):

$$S_0^n = \mathbb{E}_Q(\widetilde{S}_1^n) = \mathbb{E}_Q(\tfrac{S_1^n}{1+\rho}).$$

Dies ist jedoch – wegen der Risikolosigkeit des konstanten Zinssatzes ρ – nach Definition der Ertragsrate R_1^n äquivalent zu der folgenden Identität:

$$\mathbb{E}_Q(R_1^n) = \rho\ .$$

Mit anderen Worten: Wählt ein Investor Q als "Einschätzung der Zukunft", so ist es für ihn (im Q–Mittel) ununterscheidbar, ob er in das risikobehaftete Asset S^n investiert oder ob er den Betrag S_0^0 in ein "Sparbuch" zu dem risikolosen Zinssatz ρ investiert. Ein solcher Investor agiert risikoneutral!

Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist also *ein zu dem originalen Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, so daß der momentane Preis eines Finanzguts zum Zeitpunkt* $t = 0$ *gleichzusetzen ist mit dem zum Zeitpunkt* $t = 1$ *erwarteten Preis – unter* Q.

Die Bedingung (1) ist jedoch nichts anderes als eine kurze Schreibweise für das folgende lineare Gleichungssystem:

$$Aq = b, \tag{2}$$

wobei $A := \begin{pmatrix} \widetilde{S}_1^1(\omega_1) & \cdots & \widetilde{S}_1^1(\omega_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{S}_1^N(\omega_1) & \cdots & \widetilde{S}_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(N \times K; \mathbb{R})$, $q := \begin{pmatrix} Q(\{\omega_1\}) \\ \vdots \\ Q(\{\omega_K\}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K$ und $b := \begin{pmatrix} \widetilde{S}_0^1 \\ \vdots \\ \widetilde{S}_0^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

Denken wir an die lineare Algebra, dann ist spätestens an dieser Stelle klar, daß es sogar (je nach Wahl der Modellparameter) keine bzw. unendlich viele solcher risikoneutraler Wahrscheinlichkeitsmaße geben kann; Q ist nämlich *zumindest dann* eindeutig bestimmt, falls die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N$ injektiv ist und das lineare Gleichungssystem (2) überhaupt eine Lösung besitzt; also falls gilt:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{K} = \mathrm{rg}(A, b).$$

Die Existenz solcher risikoneutraler Wahrscheinlichkeitsmaße hat bedeutende Konsequenzen für die Bewertung von derivativen Finanzinstrumenten, wie wir später erkennen werden. Wenden wir uns zunächst jedoch einem Beispiel zu:

Beispiel 6 (Fortsetzung von Bsp. 2): Es gelte $d < 1 + \rho < u$ (also das NAP). Bestimmen Sie alle risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße in diesem Modell!

Lösung: Angenommen, es gäbe ein solches risikoneutrales W'maß Q. Beachten wir (2) und die Annahmen unseres Modells in Beispiel 2, so müssen wir dann folgendes "LGS" lösen:

$$\begin{pmatrix} \frac{dA_0}{1+\rho} & \frac{uA_0}{1+\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\{\omega_1\}) \\ Q(\{\omega_2\}) \end{pmatrix} = A_0.$$

Setzen wir $q := Q(\{\omega_2\})$, folgt also (da $Q(\{\omega_1\}) = 1 - q$ und $A_0 \neq 0$)

$$\frac{u}{1+\rho}q + \frac{d}{1+\rho}(1-q) = 1,$$

und wir erhalten somit durch Auflösung nach q:

$$Q(\{\omega_2\}) = q = \frac{(1+\rho) - d}{u - d} > 0 \tag{3}$$

und

$$Q(\{\omega_1\}) = 1 - q = \frac{u - (1+\rho)}{u - d} > 0.$$

Definieren wir nun Q auf diese Weise, dann ist Q ein W'maß auf Ω, das offensichtlich die Bedingung (ii) erfüllt. Folglich haben wir gezeigt, daß in Beispiel 2 – unter der Voraussetzung des NAPs – *genau ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß* existiert, das durch (3) beschrieben wird *und* das unabhängig vom momentanen Wert $A_0 \neq 0$ der Aktie ist. □

Übung 5 (Fortsetzung von Bsp. 4): Bestimmen Sie unter Verwendung der Daten von Beispiel 4 alle risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße!

Lösung: Angenommen, es gäbe ein solches risikoneutrales W'maß Q. Setze $q_k := Q(\{\omega_k\})$, $k = 1, 2, 3$. Dann gilt: $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ und (wegen Bedingung (i)) $0 < q_k \; \forall k \in \{1, 2, 3\}$. Zu lösen ist

$$5 = q_1 \cdot \frac{dA_0}{1+\rho} + q_2 \cdot \frac{uA_0}{1+\rho} + 3q_3 = 4q_1 + 6q_2 + 3q_3.$$

Wir setzen dazu $\lambda = q_2$. Dann erhalten wir $1 - \lambda = q_1 + q_3$ und $5 - 6\lambda = 4q_1 + 3q_3$. Lösen wir dieses LGS nach q_1 und q_3 auf, so folgt $0 < q_1 = 2 - 3\lambda$ und $0 < q_3 = 2\lambda - 1$. Insbesondere ist $1/2 < \lambda < 2/3$ und also $(q_1, q_2, q_3)^\top \in \{(2 - 3\lambda, \lambda, 2\lambda - 1)^\top : 1/2 < \lambda < 2/3\} =: M$. Setzen wir umgekehrt $Q(\{\omega_1\}) := 2 - 3\lambda$, $Q(\{\omega_2\}) := \lambda$ und $Q(\{\omega_3\}) := 2\lambda - 1$, wobei $1/2 < \lambda < 2/3$, so ist dieses Q ein wohldefiniertes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Also beschreibt die (überabzählbare) Menge M alle risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße des Modells in Beispiel 4. □

Wir wenden uns nun der wahrscheinlichkeitstheoretischen Umformulierung des NAPs zu und erhalten damit eine sehr wichtige und für die Bewertung von Derivaten permanent benötigte mathematische Formulierung des ökonomischen Sachverhalts der No–Arbitrage, also den *1. Fundamentalsatz der Finanzgutbewertung für das EPM.* Die dabei durchgeführten (nicht–trivialen) Überlegungen werden sich später auch auf Finanzmarktmodelle mit mehreren Handelsperioden und mit kontinuierlichem Handeln übertragen lassen.

Satz (1. Fundamentalsatz der Finanzgutbewertung für das EPM): Im Rahmen des EPMs sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Der EPM–Markt ist arbitragefrei;

(ii) Es gibt mindestens (!) ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Implikation "(ii)$\Longrightarrow$(i)", deren Beweis unmittelbar nachvollziehbar ist. Es gebe also ein risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß Q. Sei $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine beliebige Handelsstrategie, mit $G(H) \geq 0$. Zu zeigen: $G(H) = 0$. Da H keine Zufallsvariable ist (der Handel beginnt unmittelbar nach $t = 0$ und endet zu $t = 1$; im Zeitintervall $(0, 1)$ findet kein Handel statt), folgt somit

$$\mathbb{E}_Q(G(H)) = \mathbb{E}_Q(\sum_{n=1}^{N} H^n \Delta \widetilde{S}_1^n) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{N} H^n \cdot \mathbb{E}_Q(\Delta \widetilde{S}_1^n) = 0.$$

Also gilt (nach Definition des Erwartungswertes): $0 = \sum_{k=1}^{K} G(H)(\omega_k) \cdot Q(\{\omega_k\})$. Da nach Voraussetzung $G(H)(\omega) \geq 0$ und $Q(\{\omega\}) > 0$ für jedes $\omega \in \Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$, folgt bereits: $G(H) = 0$ auf ganz Ω. Damit ist das NAP erfüllt.
Der Beweis "(i)$\Longrightarrow$(ii)"der anderen Implikation benötigt ein mathematisches Hilfsmittel aus der konvexen Analysis, dessen Beweis über den Rahmen dieser Vorlesung hinausragt, jedoch anschaulich "klar" ist:

Hyperebenen–Trennungssatz in $\mathbb{R}^K$: Sei L ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^K$. Sei C eine kompakte und konvexe Teilmenge in $\mathbb{R}^K$, die keine gemeinsamen Punkte mit L hat:

$$C \cap L = \varnothing.$$

Dann lassen sich L und C durch eine Hyperebene trennen, welche L enthält. Das heißt:

$$\exists\, u \in \mathbb{R}^K, \text{ s.d. } \langle x, u \rangle > 0\ \forall x \in C \text{ und } \langle y, u \rangle = 0\ \forall y \in L.$$

Es gelte (i), also das NAP. Wir betrachten die folgende nicht–leere Menge (Simplex):

$$C := \{x \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{k=1}^{K} x_k = 1\}.$$

Weiter sei

$$L := \{(G(H)(\omega_1), ..., G(H)(\omega_K))^\top : H \in \mathbb{R}^{N+1}\}.$$

Dann ist offensichtlich C kompakt (beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^K$) und konvex und L ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^K$. Nach Konstruktion von C impliziert nun das vorausgesetzte NAP im EPM, daß

$$C \cap L \stackrel{!}{=} \varnothing.$$

Also existiert nach dem HTS ein Vektor $u \in \mathbb{R}^K$, so daß

(a) $\langle x, u \rangle > 0\ \forall x \in C$,

(b) $\langle y, u \rangle = 0\ \forall y \in L$.

Insbesondere gilt wegen (a) $u_k = \langle e_k, u \rangle > 0$ für alle $k = 1, ..., K$, so daß wir durch

$$Q(\{\omega_k\}) := \frac{u_k}{\sum_{k=1}^{K} u_k}$$

ein wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ erhalten, mit $Q(\{\omega\}) > 0 \;\forall \omega \in \Omega$. Weiter erhalten wir für jedes $n \in \{1, ..., N\}$:

$$\mathbb{E}_Q(\Delta \widetilde{S}_1^n) = \mathbb{E}_Q(G(e_n)) = \Big(\sum_{k=1}^{K} G(e_n)(\omega_k) \cdot u_k\Big) / \sum_{k=1}^{K} u_k \overset{(b)}{=} 0.$$

Also ist Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. □

Setzen wir

$$\mathbb{M}_{++} := \{Q : Q \text{ ist risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß}\},$$

so läßt sich der 1. FSFB sehr kurz schreiben als:

$$\text{Es gilt das NAP} \Longleftrightarrow \mathbb{M}_{++} \neq \emptyset.$$

Wir haben nun sämtliche Werkzeuge bereitgestellt, um derivative Finanzinstrumente mittels der Konstruktion eines *Hedge–Portfolios* (falls ein solches existiert) im EPM bewerten zu können. Sei X ein beliebiges DF (also eine beliebige ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$).

Definition (Replizierbarkeit im EPM–Markt): Ein DF X heißt *erreichbar* (*replizierbar*), falls es eine (von X abhängige) Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ gibt, so daß

$$X = V_1(H).$$

Der EPM–Markt heißt *vollständig*, falls jedes DF replizierbar ist. Andernfalls heißt der EPM–Markt *unvollständig*.

Man sieht sofort, daß $X = V_1(H)$ genau dann gilt, falls $\widetilde{X} := X/S_1^0 = \widetilde{V}_1(H)$, also falls das folgende LGS erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{S}_1^1(\omega_1) & \cdots & \widetilde{S}_1^N(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \widetilde{S}_1^1(\omega_K) & \cdots & \widetilde{S}_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^0 \\ \vdots \\ H^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widetilde{X}(\omega_K) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Sei X erreichbar – mit Handelsstrategie H, und es gelte das NAP. Dann gibt es nach dem 1. FSFB (mindestens) ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so daß insbesondere $\mathbb{E}_Q(G(H)) = 0$. Also erhalten wir für $X = V_1(H)$:

$$\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = \mathbb{E}_Q(\widetilde{V}_1(H)) = \mathbb{E}_Q(\widetilde{V}_0(H) + G(H)) = V_0(H) \;\; \forall\, Q \in \mathbb{M}_{++}.$$

Wird X durch zwei Handelsstrategien H und $\widehat{H}$ erreicht, so ist nach dem Prinzip des eindeutigen Preises $V_0(H) = V_0(\widehat{H})$, und wir erhalten damit das folgende zentrale Bewertungskriterium, das auch eine Grundlage zur Herleitung der Black–Scholes–Formel darstellt:

Satz (Bewertung erreichbarer Derivate im EPM): Es gelte das NAP. Sei $X = V_1(H)$ ein erreichbares derivatives Finanzinstrument. Dann ergibt sich für jedes risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß Q der diskontierte Wert $\mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$ als der momentane Wert des durch H erzeugten Portfolios:

$$\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = V_0(H).$$

Insbesondere ist $V_0(H)$ unabhängig von der Wahl des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Wird X durch zwei Handelsstrategien H und $\widehat{H}$ erreicht, so ist $V_0(H) = V_0(\widehat{H}) = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$ der eindeutig bestimmte Preis des DFs.

Verkauft also im EPM–Markt ein Händler ein replizierbares Derivat $X = V_1(H)$ zu dem Preis $\alpha := \mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$ $(Q \in \mathbb{M}_{++})$, kann er unmittelbar nach dem Verkauf des Instrumentes (zu $t = 0$) diese Handelsstrategie $H = (H^0, H^1, ..., H^N)^\top$ in die Basistitel $S_0^0, S_0^1, ..., S_0^N$ investieren, und zwar derart, daß $H^0 = \alpha - \sum_{n=1}^N H^n S_0^n$ der Anteil am risikolosen Finanzgut S_0^0 ist, er also für das gesamte Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ den Investitionspreis $V_0(H) = \alpha$ bezahlt, und erhält *stets (unabhängig vom inhärenten Risiko des DFs X)* zur Zeit $t = 1$ den Wert $V_1(H) = X$. Hier spricht man auch vom *Hedgen* des DFs X und bezeichnet H auch als *Hedgestrategie*.

Übung 6: Sei X ein replizierbares Derivat, mit Handelsstrategie $H = (H^0, H^1, ..., H^N)^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$. Es gelte das NAP. Zeigen Sie, daß für beliebiges $Q \in \mathbb{M}_{++}$

$$X/S_1^0 = \widetilde{V}_1((\overline{H}^0, H^1, ..., H^N)^\top),$$

wobei $\overline{H}^0 := \mathbb{E}_Q(X/S_1^0) - \sum_{n=1}^N H^n S_0^n$.

Lösung: Sei $Q \in \mathbb{M}_{++}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} X/S_1^0 &= V_0(H) + G(H) = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0) + G(H) \\ &= (\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) - \sum_{n=1}^N H^n S_0^n) + \sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_1^n \\ &= \overline{H}^0 + \sum_{n=1}^N H^n \widetilde{S}_1^n = \widetilde{V}_1((\overline{H}^0, H^1, ..., H^N)^\top). \end{aligned}$$

□

Hedgestrategien im EPM erhält man dann einfach durch Lösen des obigen linearen Gleichungssystems (4).

Übung 7 (Fortsetzung von Bsp. 4): Sei der EPM–Markt von Beispiel 4 gegeben.

(1) Betrachten Sie die folgende *Asiatische Option:*

$$X := \max\{\frac{S_0^1 + S_1^1}{2} - 5, 0\}.$$

Ist X replizierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Hedgestrategie!

(2) Sei X ein *beliebiges* DF. Geben Sie notwendige und hinreichende Voraussetzungen für X an, damit X replizierbar ist!

Lösung:

ad (1): Wir setzen $\widetilde{X} := X/S_1^0$. Gemäß der Daten von Beispiel 4 errechnet man sofort, daß $\widetilde{x}_1 := \widetilde{X}(\omega_1) = 0$, $\widetilde{x}_2 := \widetilde{X}(\omega_2) = 3/4$ und $\widetilde{x}_3 := \widetilde{X}(\omega_3) = 0$. Angenommen, es gäbe eine Hedgestrategie $(H^0, H^1)^\top \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt wegen (4) das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $H^0 + 4H^1 = 0$, $H^0 + 6H^1 = 3/4$ und $H^0 + 3H^1 = 0$. Aus den ersten beiden Gleichungen errechnen wir $H^0 = -3/2$ und $H^1 = 3/8$. Dann jedoch folgt $H^0 + 3H^1 = -3/8 \neq 0$ – Widerspruch! Also ist das Derivat X nicht replizierbar.

ad (2): Sei X ein beliebiges DF. Wir setzen $\widetilde{X} := X/S_1^0$, $\widetilde{x}_k := \widetilde{X}(\omega_k)$, $k = 1, 2, 3$. Wegen (4) ist X genau dann replizierbar, falls es einen Vektor $(H^0, H^1)^\top \in \mathbb{R}^2$ gibt, der das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

löst. Dies ist genau dann der Fall, falls

$$\begin{aligned} H^0 + 4H^1 &= \widetilde{x}_1 \\ H^0 + 6H^1 &= \widetilde{x}_2 \\ H^0 + 3H^1 &= \widetilde{x}_3. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $2H^1 = \widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1$ und $H^0 = 3\widetilde{x}_1 - 2\widetilde{x}_2$. Setzen wir diese Werte für H^0 und H^1 in die dritte Gleichung ein, so folgt

$$\widetilde{x}_2 - 3\widetilde{x}_1 + 2\widetilde{x}_3 = 0,$$

bzw.

$$X(\omega_2) - 3X(\omega_1) + 2X(\omega_3) = 0. \tag{6}$$

Umgekehrt sieht man sofort, daß jedes Derivat X, das (6) erfüllt, das LGS (5) ergibt. Also ist X genau dann replizierbar, falls (6) erfüllt ist. □

Schauen wir uns das Gleichungssystem (4) genauer an, erkennen wir einen interessanten Zusammenhang zu dem LGS (2), also zu $Aq = b$, das zur Bestimmung des risokoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes eingesetzt wurde. Setzen wir hier zur Abkürzung $h := H = (H^0, ..., H^N)^\top$, $\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1)^\top \in \mathbb{R}^K$ und $\widetilde{x} := (\widetilde{X}(\omega_1), ..., \widetilde{X}(\omega_K))^\top$, so ergibt sich mittels der transponierten Matrix $A^\top$die folgende *äquivalente* Formulierung des LGS (4):

$$Bh = \left(\mathbf{1}, A^\top\right) h = \widetilde{x},$$

wobei $B := \left(\mathbf{1}, A^\top\right) \in M(K \times (N+1); \mathbb{R})$. Damit haben wir alles vorbereitet, um vollständige Märkte im EPM zu charakterisieren:

Satz (2. Fundamentalsatz der Finanzgutbewertung für das EPM): Es gelte das NAP. Dann sind folgende Aussagen *äquivalent*:

(i) Der EPM–Markt ist vollständig;

(ii) Es gibt genau ein risokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis: Es gelte zunächst (i). Seien Q_1 und Q_2 zwei solcher risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße. Zu zeigen

$$Q_1(\{\omega\}) \stackrel{!}{=} Q_2(\{\omega\}) \ \ \forall \omega \in \Omega.$$

Sei also $\omega \in \Omega$ beliebig gewählt. Gemäß Voraussetzung gibt es insbesondere zu $X := \mathbf{1}_{\{\omega\}}$ eine Handelstrategie H, so daß $\mathbf{1}_{\{\omega\}} = X = V_1(H)$. Da $\widetilde{X} = V_0(H) + G(H)$, folgt somit

$$Q_1(\{\omega\}) = \mathbb{E}_{Q_1}(\mathbf{1}_{\{\omega\}}) = S_1^0 \cdot \mathbb{E}_{Q_1}(\widetilde{X}) = S_1^0 \cdot V_0(H) = \mathbb{E}_{Q_2}(\mathbf{1}_{\{\omega\}}) = Q_2(\{\omega\}),$$

und wir haben (ii) erhalten.
Sei nun (ii) gegeben. Dann existiert *genau ein* $q = (q_1, ..., q_K)^\top \in \mathbb{R}^K$, mit $\sum_{k=1}^K q_k = 1$, $q_k > 0 \ \forall k$ und $Aq = b$. Zu zeigen ist:

$$\mathrm{Im}(B) := \{Bh : h \in \mathbb{R}^{N+1}\} \stackrel{!}{=} \mathbb{R}^K.$$

Hierzu wenden wir – ohne Beweis – eine nicht–triviale Aussage aus der Dualitätstheorie auf unsere Matrix B an; es gilt allgemein:

Hilfssatz 2.1 *Sei $D : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine beliebige lineare Abbildung ($l, m \in \mathbb{N}$). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) D ist surjektiv;

(ii) $D^\top$ ist injektiv.

Also genügt es aufgrund dieses Hilfssatzes (angewendet auf die lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^K$) zu zeigen, daß $\mathrm{Ker}(B^\top)$ nur aus dem Nullvektor besteht. Sei dazu $u = (u_1, ..., u_K)^\top \in \mathrm{Ker}(B^\top)$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$B^\top u = 0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix} u,$$

und es folgt $\sum_{k=1}^K u_k = 0$ und $Au = 0$. Da $q_k > 0 \, \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall \ k \in \{1, 2, \dots, K\}$ gilt: $q_k + 1/n_0 \cdot u_k > 0$ (Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Wert $k_n \in \{1, 2, \dots, K\}$ mit $q_{k_n} + 1/n \cdot u_{k_n} \leq 0$. Insbesondere wäre damit $\min\{q_k : 1 \leq k \leq K\} + 1/n \cdot \min\{u_k : 1 \leq k \leq K\} \leq q_{k_n} + 1/n \cdot u_{k_n} \leq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$; also auch (nach Grenzübergang) $\min\{q_k : 1 \leq k \leq K\} \leq 0$ – ein Widerspruch). Setzen wir $\widetilde{q} := q + 1/n_0 \cdot u$, so folgt aus den bisherigen Überlegungen, daß $\widetilde{q}_k > 0 \ \forall k \in \{1, ..., K\}$, $\sum_{k=1}^K \widetilde{q}_k = \sum_{k=1}^K q_k + 1/n_0 \cdot \sum_{k=1}^K u_k = 1 + 0 = 1$ und $A\widetilde{q} = Aq + 1/n_0 \ Au = b + 0 = b$. Mit anderen Worten: $\widetilde{q}$ ist ebenfalls ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß! Damit folgt nach Voraussetzung (ii), daß bereits schon $\widetilde{q} = q$ gelten muß, womit wir $u = 0$ erhalten. Also besteht $\mathrm{Ker}(B^\top)$ nur aus dem Nullvektor, und der Satz ist bewiesen. □

Korrolar 2.1 *Es gelte das NAP. Ist der EPM-Markt vollständig, so gilt: $K \leq N+1$.*

Beweis: $B^\top : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{rg}(B^\top) = K$. Da jedoch stets $\mathrm{rg}(B^\top) \leq N+1$, folgt die Behauptung[4]. □

Beispiel 7 (Fortsetzung von Bsp. 2): Sei $d < 1+\rho < u$. Da $\mathbb{M}_{++} = \{Q\}$ nur aus einem Element besteht, ist der EPM–Markt in Beispiel 2 vollständig (vgl. Bsp. 6). Wir können also in diesem EPM–Markt jedes derivative Finanzinstrument replizieren. Sei X ein beliebiges DF. Setzen wir $\widetilde{X} = X/S_1^0$, $\widetilde{x}_1 := \widetilde{X}(\omega_1)$ und $\widetilde{x}_2 := \widetilde{X}(\omega_2)$, dann ist (gemäß (4)) $h = (H^0, H^1)^\top \in \mathbb{R}^2$ genau dann eine Hedgestrategie, falls

$$Bh = \widetilde{x},$$

wobei $B := \begin{pmatrix} 1 & \frac{dA_0}{1+\rho} \\ 1 & \frac{uA_0}{1+\rho} \end{pmatrix}$ und $\widetilde{x} := \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}$. Da $d < u$ und $A_0 > 0$, ist also $0 \neq \det(B) = \frac{A_0}{1+\rho} \cdot (u-d)$, so daß

$$h = B^{-1}\widetilde{x} = \frac{1+\rho}{A_0(u-d)} \begin{pmatrix} \frac{uA_0}{1+\rho} & -\frac{dA_0}{1+\rho} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich nach einer kleinen Rechnung:

$$H^0 = \frac{uX(\omega_1) - dX(\omega_2)}{(u-d)(1+\rho)} = \frac{S_1^1(\omega_2) \cdot X(\omega_1) - S_1^1(\omega_1) \cdot X(\omega_2)}{\left(S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)\right)(1+\rho)}$$

und

$$H^1 = \frac{X(\omega_2) - X(\omega_1)}{(u-d)\,A_0} = \frac{X(\omega_2) - X(\omega_1)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} =: \frac{\delta X}{\delta S_1^1}.$$

Also gibt H^1 an, um wieviel sich zum Zeitpunkt $t = 1$ der Wert des Derivats X ändert, falls sich der Wert des Underlyings S_1^1 ändert:

$$X(\omega_2) = X(\omega_1) + \left(S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)\right) \cdot \frac{\delta X}{\delta S_1^1}.$$

Der Parameter H^1 wird auch als *"Delta" des DFs X* bezeichnet. Setzen wir

$$Z(\omega) := \frac{(1+\rho)A_0 - S_1^1(\omega)}{S_1^1(\omega_2) - S_1^1(\omega_1)} \quad (\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{0,1\}),$$

so erhalten wir den momentanen Wert $V_0(H)$ von $X = V_1(H)$:

$$V_0(H) = H^0 + H^1 A_0 = \frac{1}{1+\rho} \cdot (X(\omega_2)Z(\omega_1) - X(\omega_1)Z(\omega_2)).$$

Beispiel 8 (Fortsetzung von Bsp. 4): Gemäß Übung 5, gilt:

$$\mathbb{M}_{++} = \{(2-3\lambda, \lambda, 2\lambda-1)^\top : 1/2 < \lambda < 2/3\}.$$

[4] Die Anzahl aller Zustände darf dann also nicht strikt größer sein als die Anzahl aller zugrundeliegenden Assets.

Also ist der EPM–Markt nicht vollständig. Dies folgt natürlich auch sofort (ohne Kenntnis der Menge $\mathbb{M}_{++}$) aus

$$\mathrm{rg}(B^\top) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 3.$$

Übung 8: Es gelte das NAP. Sei X ein DF. Der Wert $\mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$ sei unabhängig von der Wahl des risokoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q \in \mathbb{M}_{++}$. Zeigen Sie, daß dann X bereits erreichbar ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie den Beweis des 2. Fundamentalsatzes!)

Lösung: Da $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B^\top)^\circ$, genügt es also zu zeigen: $\widetilde{x} \overset{!}{\in} \mathrm{Ker}(B^\top)^\circ$. Sei dazu $u = (u_1, ..., u_K)^\top \in \mathrm{Ker}(B^\top)$ beliebig gewählt. Dann läßt sich analog zum Beweis des vorherigen Satzes ein weiteres risokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{q} := q + 1/n_0 \cdot u$ konstruieren, so daß also

$$\langle u, \widetilde{x} \rangle = \langle n_0 \cdot (\widetilde{q} - q), \widetilde{x} \rangle = n_0 \cdot (\langle \widetilde{q}, \widetilde{x} \rangle - \langle q, \widetilde{x} \rangle).$$

Da nach Konstruktion $\widetilde{Q}(\{\omega_k\}) = \widetilde{q}_k$ für jedes $k \in \{1, ..., K\}$, gilt nach Voraussetzung: $\langle \widetilde{q}, \widetilde{x} \rangle - \langle q, \widetilde{x} \rangle = \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}(X/S_1^0) - \mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = 0$. Also gilt $\langle u, \widetilde{x} \rangle = 0 \ \forall u \in \mathrm{Ker}(B^\top)$ und damit $\widetilde{x} \in \mathrm{Ker}(B^\top)^\circ$. □

Damit haben wir nun alles bereitgestellt, um replizierbare Derivate $X \in \mathcal{V}_1 = \{\widetilde{V}_1(H) : H \in \mathbb{R}^{N+1}\}$ vollständig zu charakterisieren:

Satz (Darstellung replizierbarer Derivate im EPM): Es gelte das NAP, und X sei ein beliebiges DF. Dann sind folgende Aussagen *äquivalent*:

(i) X ist (durch ein Hedge–Portfolio) replizierbar;

(ii) $\exists\, H^1, ..., H^N \in \mathbb{R}$, so daß $\forall\, Q \in \mathbb{M}_{++}$:

$$X/S_1^0 = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0) + \sum_{n=1}^{N} H^n \cdot \Delta \widetilde{S}_1^n;$$

(iii) $\mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$ ist unabhängig von der Wahl des risokoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes: $\mathbb{E}_{Q_1}(X/S_1^0) = \mathbb{E}_{Q_2}(X/S_1^0)\ \forall\, Q_1, Q_2 \in \mathbb{M}_{++}$.

(iv) $\exists$ Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^{N+1}$, so daß $\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = V_0(H)\ \forall\, Q \in \mathbb{M}_{++}$.

Beweis: Übung! □

Angenommen, das NAP sei erfüllt. Dann existiert nach dem 1. FSFB ein $Q \in \mathbb{M}_{++}$, so daß $\mathbb{E}_Q(G(H)) = 0\ \forall H \in \mathbb{R}^{N+1}$, so daß dadurch folgende Abbildung wohldefiniert ist (vgl. Übung 2):

$$\pi_0 : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathbb{R},\ V_1(H) \mapsto V_0(H),$$

wobei hier $\mathcal{V}_1$ die Menge aller replizierbaren Derivate bezeiche.

Übung 9: Zeigen Sie, daß π_0 folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) π_0 ist ein lineares Funktional.

(2) Sei X ein replizierbares Derivat, mit Hedgestrategie H, dann gilt

$$\pi_0(X) = V_0(H) = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0).$$

(3) Sei X ein replizierbares Derivat, so daß $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, dann ist $\pi_0(X) \geq 0$. Ist zusätzlich $X(\omega) \neq 0$ für ein $\omega \in \Omega$, so folgt $\pi_0(X) > 0$.

Lösung: $X/S_1^0 = \widetilde{V}_1(H) = \pi_0(X) + G(H)$. Also gilt für jedes $Q \in \mathbb{M}_{++}$: $\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = \pi_0(X)$. □

Sei X ein replizierbares Derivat. Dann läßt sich gemäß (4) eine Hedgestrategie $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ konstruieren, deren Komponenten jeweils nur von Werten der zugrundeliegenden Finanzgüter $S_1^0, ..., S_1^{N+1}$ abhängen und somit $X = V_1(H)$ in jedem Zustand vollständig durch die entsprechenden Werte der Basisgüter bestimmt wird, also X eigentlich ein "redundantes" Finanzinstrument ist. Nehmen wir dann dieses Derivat X als neues Finanzgut zu unserem Basismodell $\{S_t^0, ..., S_t^N : t \in \mathcal{T}\}$ hinzu, erweitern also unseren EPM–Markt zu $\{S_t^0, ..., S_t^N, S_t^{N+1} : t \in \mathcal{T}\}$, wobei $S_1^{N+1} := X$ und $S_0^{N+1} := \pi_0(X)$, dann sollte sich die zugrundeliegende ökonomische Struktur des EPM–Marktes nicht verändern. Insbesondere sollte der erweiterte EPM–Markt das NAP erfüllen. Dies ist tatsächlich der Fall, denn es gilt der folgende

Satz: Seien $p \in \mathbb{R}$ und ein arbitragefreier EPM–Markt $\{(S_t^0, ..., S_t^N) : t \in \{0, 1\}\}$ gegeben. Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiges (nicht notwendigerweise replizierbares!) DF und $\mathbb{M}_{++}$ die (nicht–leere) Menge aller risokoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße dieses EPM–Marktes. Erweitern wir den EPM–Markt zu $\{(S_t^0, ..., S_t^N, S_t^{N+1}) : t \in \{0, 1\}\}$, wobei $S_1^{N+1} := X$ und $S_0^{N+1} = p$, dann bleibt das No–Arbitrage–Prinzip in dem erweiterten EPM–Markt *genau dann* erhalten, falls

$$p \in \{\mathbb{E}_Q(X/S_1^0) : Q \in \mathbb{M}_{++}\}.$$

Beweis: Sei zunächst $p = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0)$, wobei $Q \in \mathbb{M}_{++}$. Dann folgt $\mathbb{E}_Q(\Delta \widetilde{S}_1^n) = 0 \ \forall \ n = 1, 2, \ldots, N, N+1$. Damit ist Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß in dem erweiterten EPM–Markt Wegen des 1. FSFB ist also das NAP auch für den durch X erweiterten EPM–Markt erfüllt.
Ist umgekehrt das NAP in dem erweiterten EPM–Markt $\{(S_t^0, ..., S_t^N, S_t^{N+1}) : t \in \{0, 1\}\}$ erfüllt, mit $S_1^{N+1} := X$ und $S_0^{N+1} = p$, dann gibt es nach dem 1. FSFB ein risokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q in diesem erweiterten EPM–Markt, so daß insbesondere

$$p = S_0^{N+1} = \mathbb{E}_Q(\widetilde{S}_1^{N+1}) = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0).$$

Als risokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß in dem erweiterten EPM–Markt ist natürlich $Q \in \mathbb{M}_{++}$. □

Folgerung: Sei nun *zusätzlich* zu den Voraussetzungen des vorherigen Satzes X *replizierbar*. Beachten wir Übung 9, dann gilt das NAP in dem erweiterten EPM–Markt genau dann, falls $p = \pi_0(X)$.

Bedingt durch diese Eigenschaften von π_0, bezeichnen wir im folgenden π_0 als *Bewertungsfunktional*. Ist X ein replizierbares DF, so heißt $\pi_0(X)$ *der faire Preis von* X.

Beispiel 9 (Fortsetzung von Bsp. 2): Gemäß Beispiel 6, wird das eindeutig bestimmte risokoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß Q gegeben durch $Q(\{\omega_1\}) = \frac{u-(1+\rho)}{u-d}$ und $Q(\{\omega_2\}) = \frac{(1+\rho)-d}{u-d}$, so daß also jedes DF X replizierbar ist, mit fairem Preis (vgl. Bsp. 7):

$$\pi_0(X) = \mathbb{E}_Q(X/S_1^0) = \frac{1}{1+\rho} \cdot (\frac{u-(1+\rho)}{u-d} X(\omega_1) + \frac{(1+\rho)-d}{u-d} X(\omega_2)).$$

Bevor wir nun das allgemeine Mehrperiodenmodell einführen, konzentrieren wir uns auf einen sehr wichtigen Spezialfall davon, der in der Praxis sehr oft zur Bewertung einer Vielzahl derivativer Finanzinstrumente eingesetzt wird. Hierbei verwenden wir einen eigenen Ansatz, der noch nicht den allgemeinen mathematischen Rahmen benötigt, der zum Aufbau einer No–Arbitrage–Theorie für Mehrperiodenmodelle notwendig ist. Insbesondere erlaubt unser (auch intuitiv einsichtiger) Ansatz, das Binomial–Modell von Cox–Ross–Rubinstein *ohne* den Begriff der Filtrierung und des Martingals einzuführen.

3 Das Binomialmodell von Cox–Ross–Rubinstein

Bevor wir allgemein Mehrperiodenmodelle (und die dazu notwendigen neuen mathematischen Begriffe "Filtrierung" und "Martingal") einführen, wenden wir uns zunächst einem Spezialfall eines solchen MPMs zu, das mehrere Handelsperioden zuläßt und sich direkt als eine Hintereinanderausführung von EPM–Märkten $(\{0,1\}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ darstellen läßt, wobei jeder abdiskontierte EPM–Baustein die Struktur des EPM–Marktes von Beispiel 2 besitzt und unabhängig "wiederholt wird". Es handelt sich hierbei um das *Cox–Ross–Rubinsteinsche Binomialmodell*, dessen Anwendung insbesondere eine diskrete Version der Black–Scholes–Formel impliziert.

$\longrightarrow$ **Skizze:** Baum für $T = 3$ Handelsperioden;

Ausgehend von $\Omega := \{0,1\}$, definieren nun den folgenden

3.1 Modellrahmen für den CRR–Markt

Ein Markt im Cox–Ross–Rubinstein Modell (CRR) setzt sich – unter Einbezug der Parameter aus Beispiel 2 – aus folgenden Daten zusammen:

- Aus T Handelsperioden zwischen den Zeitpunkten $t = 0, 1, ..., T$, wobei $T \in \mathbb{N}$ vorgegeben ist. Handel und Konsum der Investoren findet *nur* zu diesen Zeitpunkten statt, wobei $t = 0$ den Zeitpunkt bezeichnet, zu dem die Preise der zu handelnden Finanzgüter bekannt sind und zu dem die Kombination dieser Güter (das *Portfolio*) zusammengestellt wird. T beschreibt den zukünftigen Zeitpunkt, in dem sich der Wert des Portfolios aus der zufälligen Preisentwicklung der einzelnen Finanzgüter ergibt und an dem Handel und Konsum beendet werden.

- Aus T Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2), ..., (\Omega_T, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}_T)$, mit endlicher Stichprobenmenge $\Omega_t := \Omega^t = \{0,1\}^t = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_t) : \omega_i \in \{0,1\} = \Omega\}$ und σ–Algebra $\mathcal{F}_t = 2^{\Omega_t}$. Hierbei stellt für jedes $t \in \mathcal{T} = \{1, ..., T\}$ $\omega \in \Omega_t$ einen möglichen Zustand der Welt dar, der zum momentanen Zeitpunkt $t = 0$ nicht bekannt ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_t$ sei dabei definiert durch

$$\mathbb{P}_t(A) = \sum_{\omega \in A} p^{n_t(\omega)} \cdot (1-p)^{t-n_t(\omega)} \ (A \in \mathcal{F}_t),$$

wobei $0 < p < 1$ und $n_t(\omega) := \sum_{i=1}^t \omega_i$ die Anzahl der Einsen im Vektor $\omega = (\omega_1, ..., \omega_t) \in \Omega_t$ bezeichnet (s. Übung 10).

- Einer Zeitreihe $\{A_t : t \in \mathcal{T}\}$, wobei $A_t : \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}$ den Preis eines risikobehafteten Finanzgutes zur Zeit $t \in \mathcal{T}$ bezeichnet. Dabei sei zusätzlich für jedes $t \in \mathcal{T}$ $\rho_t := \rho > 0$ ein gegebener zeitlich konstanter Zinssatz. Die ZV A_t werde nun (mit den Daten aus Beispiel 2) folgendermaßen konstruiert: Sei $d < 1 + \rho < u$. Wir definieren eine ZV $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\xi(\omega) := \begin{cases} d & : \quad \text{falls } \omega = 0 \\ u & : \quad \text{falls } \omega = 1 \end{cases}$$

und setzen für $t \in \mathcal{T}$

$$A_t(\omega_1, ..., \omega_t) := A_0 \cdot \prod_{s=1}^t \xi(\omega_s) = A_{t-1}(\omega_1, ..., \omega_{t-1}) \cdot \xi(\omega_t).$$

Übung 10: Zeigen Sie, daß für jedes $t \in \mathcal{T}$ $\mathbb{P}_t : \mathcal{F}_t \to [0,1]$ ein wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß ist!

Lösung: Es genügt zu zeigen, daß $\mathbb{P}_t(\Omega_t) = 1$. Von früheren Lektionen wissen wir, daß es für $k \in \{0, 1, ..., t\}$ insgesamt genau $\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{t!}{(t-k)! \cdot k!}$ Möglichkeiten gibt, k Einsen auf t Kästchen zu verteilen. Insbesondere besteht also für jedes $k \in \{0, 1, ..., t\}$ die Menge

$$\mathcal{G}_k^{(t)} := \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_t) \in \Omega_t : n_t(\omega) = \sum_{s=1}^t \omega_s = k\} = \{n_t = k\} \subseteq \Omega_t$$

aus genau $\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix}$ Elementen. Man sieht sofort, daß sich Ω_t als disjunkte Vereinigung $\Omega_t = \bigcup_{k=0}^t \mathcal{G}_k^{(t)}$ darstellen läßt. Also erhalten wir: $\mathbb{P}_t(\Omega_t) = \sum_{k=0}^t \sum_{\omega \in \mathcal{G}_k^{(t)}} p^{n(\omega)} \cdot (1-p)^{t-n(\omega)} = \sum_{k=0}^t \sum_{\omega \in \mathcal{G}_k^{(t)}} p^k \cdot (1-p)^{t-k} = \sum_{k=0}^t \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{t-k} = (p + (1-p))^t = 1.$ □

Interpretation: Sei ein $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ als Gegenwartszeitpunkt beliebig gewählt. Zu diesem Zeitpunkt t kennen wir alle bis dahin realisierten Zustände $\omega_1, ..., \omega_t$ und damit insbesondere den Preis $A_t(\omega_1, ..., \omega_t)$, der zu *diesem* Zeitpunkt keine Zufallsvariable ist. Verfolgen wir die Preisentwicklung dieses Finanzguts eine Handelsperiode weiter, so ist *bei gegebenem* $(\omega_1, ..., \omega_t) \in \Omega_t$ dieser Preis zum Zeitpunkt $t+1$ also eine Zufallsvariable

$$A_{t+1}(\omega_1, ..., \omega_t, \bullet) := A_t(\omega_1, ..., \omega_t)\,\xi = (A_0 \prod_{s=1}^{t} \xi(\omega_s))\,\xi,$$

so daß wir nach Konstruktion zwischen den Zeitpunkten t und $t+1$ den folgenden EPM–Markt erhalten:

$$\begin{pmatrix} (1+\rho)^t \\ A_t(\omega_1, ..., \omega_t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+\rho)\cdot(1+\rho)^t \\ A_t(\omega_1, ..., \omega_t)\,\xi \end{pmatrix}.$$

Also erfährt $A_t(\omega_1, ..., \omega_t)\,\xi$ also nur eine Aufwärtsbewegung und eine Abwärtsbewegung der Form

$$A_t(\omega_1, ..., \omega_t)\,\xi = \begin{cases} u\,A_t(\omega_1, ..., \omega_t) & \text{mit W‘keit } p \\ d\,A_t(\omega_1, ..., \omega_t) & \text{mit W‘keit } 1-p \end{cases}$$

so daß wir damit *nach Diskontierung genau die Struktur des EPM–Marktes von Beispiel 2 erhalten*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{A_t(\omega_1, ..., \omega_t)}{(1+\rho)^t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\rho \\ \dfrac{A_t(\omega_1, ..., \omega_t)}{(1+\rho)^t}\,\xi \end{pmatrix},$$

auf den wir somit unsere gesamten bisher erzielten Resultate anwenden dürfen! Beispielsweise existiert wegen des 1. FSFBs *genau ein* risokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q, mit $q := Q(\{1\}) = \dfrac{(1+\rho)-d}{u-d}$ und $1-q = Q(\{0\}) = \dfrac{u-(1+\rho)}{u-d}$. Insbesondere ist Q *unabhängig* von der Wahl des Zeitpunktes t!

Definition (Derivative Finanzinstrumente im CRR–Modell): Ein *derivatives Finanzinstrument (auch als Derivat bezeichnet)* im CRR–Modell ist jede Zufallsvariable $X : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$, die ein Auszahlungsprofil zur Zeit T darstellt.

Sei $X : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiges DF. Wir konstruieren nun rekursiv mittels der *Rückwärtsinduktion* eine Folge von ZVen $X_t : \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}$ $(t = T, T-1, T-2, ..., 1)$, derart daß für jedes $t \in \mathcal{T}$ zu *vorgegebenen* Zuständen $\omega_1, ..., \omega_{t-1}$ durch

$$\Omega \ni \omega \mapsto X_t(\omega_1, ..., \omega_{t-1}, \omega)$$

ein DF in dem $\{t-1, t\}$–EPM–Markt (mit den Handelszeitpunkten $t-1$ und t) gebildet wird, dessen fairer Preis

$$X_{t-1}(\omega_1, ..., \omega_{t-1}) := \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_t(\omega_1, ..., \omega_{t-1}, \bullet))$$

(zum Zeitpunkt $t-1$) wiederum als DF in dem EPM–Markt zwischen $t-2$ und $t-1$ betrachtet werden kann – bei den dort vorgegebenen Zuständen $\omega_1, ..., \omega_{t-2}$. Mittels dieser rekursiven Konstruktion, gelangen wir zuletzt zu dem Wert

$$x_0 := \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_1),$$

also dem Preis des Derivats X, für den wir später eine explizite Darstellung herleiten werden, die uns sogar *insbesondere* zu der Black–Scholes Formel für eine europäische Call-Option im CRR–Modell führen wird! Doch zunächst zu den Details der rekursiven Konstruktion:

1. Schritt ($t = T$): Wir setzen zunächst $X_T := X$.

2. Schritt ($t = T-1$): Sei $(\omega_1, ..., \omega_{T-1}) \in \Omega_{T-1}$ fest gewählt. Dann wird durch

$$Y^{\omega_1,...,\omega_{T-1}}(\omega) := \frac{X(\omega_1, ..., \omega_{T-1}, \omega)}{(1+\rho)^{T-1}}$$

ein DF $Y^{\omega_1,...,\omega_{T-1}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ im *abdiskontierten* $\{T-1, T\}$-EPM

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \dfrac{A_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-1})}{(1+\rho)^{T-1}} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1+\rho \\ \dfrac{A_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-1})}{(1+\rho)^{T-1}} \xi \end{array} \right)$$

definiert, welches also zum Zeitpunkt $t = 0$ den fairen Preis $\frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-1}}) = \pi_0(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-1}})$ besitzt. Somit ist

$$X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-1}) := (1+\rho)^{T-1} \cdot \pi_0(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-1}})$$

der faire Preis des DFs $X = X_T$ zum Zeitpunkt $T-1$ (!), und es folgt:

$$\begin{aligned} X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-1}) &= \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_T(\omega_1, ..., \omega_{T-1}, \bullet)) \\ &= \frac{1}{1+\rho} \cdot (q \cdot X(\omega_1, ..., \omega_{T-1}, 1) + (1-q) \cdot X(\omega_1, ..., \omega_{T-1}, 0)). \end{aligned}$$

3. Schritt ($t = T-2$): Gehen wir nun einen weiteren Zeitschritt zurück, betrachten also den $\{T-2, T-1\}$–EPM, so erhalten wir bei festgewähltem $(\omega_1, ..., \omega_{T-2}) \in \Omega_{T-2}$ analog durch

$$Y^{\omega_1,...,\omega_{T-2}}(\omega) := \frac{X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, \omega)}{(1+\rho)^{T-2}}$$

ein wohldefiniertes DF $Y^{\omega_1,...,\omega_{T-2}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ im abdiskontierten $\{T-2, T-1\}$–EPM

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \dfrac{A_{T-2}(\omega_1, ..., \omega_{T-2})}{(1+\rho)^{T-2}} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1+\rho \\ \dfrac{A_{T-2}(\omega_1, ..., \omega_{T-2})}{(1+\rho)^{T-2}} \xi \end{array} \right)$$

mit fairem Preis $\frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-2}}) = \pi_0(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-2}})$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Analog zur obigen Konstruktion wird damit durch

$$X_{T-2}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}) := (1+\rho)^{T-2} \cdot \pi_0(Y^{\omega_1,...,\omega_{T-2}}) = \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, \bullet))$$

der Preis der Option $X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, \bullet)$ definiert, und es gilt nach Konstruktion von X_{T-1}:

$$\begin{aligned} X_{T-2}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}) &= \frac{1}{1+\rho} \cdot (q \cdot X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 1) + (1-q) \cdot X_{T-1}(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 0)) \\ &= \frac{1}{(1+\rho)^2} \cdot (q^2 \cdot X(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 1, 1) \\ &\quad + q \cdot (1-q) \cdot (X(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 1, 0) + X(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 0, 1)) \\ &\quad + (1-q)^2 \cdot X(\omega_1, ..., \omega_{T-2}, 0, 0)). \end{aligned}$$

Sukzessives Fortsetzen dieses Verfahrens liefert nun für jedes $t \in \{1, ..., T-1\}$ den Preis

$$X_t(\omega_1, ..., \omega_t) = \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_{t+1}(\omega_1, ..., \omega_t, \bullet))$$

der Option $X_{t+1}(\omega_1, ..., \omega_t, \bullet)$ im $\{t, t+1\}$–EPM.

(T+1)–er Schritt ($t = 0$): Setze

$$x_0 := \frac{1}{1+\rho} \cdot \mathbb{E}_Q(X_1).$$

Wie schon aus den vorhergehenden Überlegungen (anschaulich) ersichtlich ist, müssen wir nun etwas Kombinatorik in die Berechnung von x_0 mit einbeziehen und entsprechende Notationen einführen. Dabei konzentriert sich der kombinatorische Aspekt auf die Aufgabe T Kästchen mit t Einsen ("schwarze Kugeln") und $T-t$ Nullen ("weiße Kugeln") zu füllen, wobei $t \in \{1, ..., T\}$. Jede Eins bzw. Null an der t–ten Stelle eines entsprechenden Vektors in $\mathbb{R}^T$ steht dabei für eine Aufwärtsbewegung bzw. Abwärtsbewegung des risikobehafteten Finanzgutpreises während der Handelsperiode zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t, so dass wir also durch die Bildung *aller* solcher Vektoren in $\mathbb{R}^T$ *alle* Pfade (Szenarien) erhalten, die für die Entwicklung des Finanzgutpreises - in diesem Modell - möglich sind! Von früheren Lektionen wissen wir, daß es insgesamt genau $\binom{T}{t} = \frac{T!}{(T-t)! \cdot t!}$ Möglichkeiten gibt, t Einsen auf T Kästchen zu verteilen. Insbesondere besteht also für jedes $t \in \{0, 1, ..., T\}$ die Menge

$$\mathcal{G}_t^{(T)} := \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_T) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^{T} \omega_i = t\} = \{n_T = t\} \subseteq \Omega_T$$

aus genau $\nu := \binom{T}{t}$ Elementen, die wir mit $a_1, ..., a_\nu$ bezeichnen. Damit erhalten wir nun den fundamentalen

Satz (Bewertung allgemeiner Derivate im CRR–Modell): Sei $T \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Sei $X : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiges DF im CRR–Modell. Dann gilt

$$x_0 = \frac{1}{(1+\rho)^T} \cdot \sum_{t=0}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T-t} \cdot \varphi_t^{(T)}(X),$$

wobei $\varphi_t^{(T)}(X) := \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega) = \sum_{k=1}^{\nu} X(a_k)$ und $\nu = \binom{T}{t}$.

Beweis (durch Induktion über T): Sei zunächst $T = 1$. Dann ist $\mathcal{G}_0^{(1)} = \{0\}$, $\mathcal{G}_1^{(1)} = \{1\}$ und $X_1 = X$. Also gilt $\varphi_0^{(1)}(X) = X(0)$, $\varphi_1^{(1)}(X) = X(1)$ und damit $x_0 = \frac{1}{(1+\rho)} \cdot \mathbb{E}_Q(X_1) = \frac{1}{(1+\rho)} \cdot (q\,X(1) + (1-q)\,X(0)) = \frac{1}{(1+\rho)^1} \cdot \sum_{t=0}^{1} q^t \cdot (1-q)^{1-t} \cdot \varphi_t^{(1)}(X)$. Damit ist der Satz für $T = 1$ richtig. Sei nun die Aussage richtig für ein beliebiges $T \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Zu zeigen ist dann auch die Gültigkeit des Satzes für $T+1$. Dazu setzen wir für $X : \Omega_{T+1} :\longrightarrow \mathbb{R}$

$$X_T(\omega_1, ..., \omega_T) := \frac{1}{(1+\rho)} \cdot \mathbb{E}_Q(X(\omega_1, ..., \omega_T, \bullet)).$$

Dann folgt

$$X_T(\omega_1, ..., \omega_T) = \frac{1}{(1+\rho)} \cdot (q\, X(\omega_1, ..., \omega_T, 1) + (1-q)\, X(\omega_1, ..., \omega_T, 0)).$$

Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf X_T an, erhalten wir

$$x_0 = \frac{1}{(1+\rho)^T} \cdot \sum_{t=0}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T-t} \cdot \varphi_t^{(T)}(X_T),$$

wobei

$$\varphi_t^{(T)}(X_T) = \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X_T(\omega).$$

Also ergibt sich nach Definition von X_T:

$$\begin{aligned} (1+\rho) \cdot \varphi_t^{(T)}(X_T) &= q \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega, 1) + (1-q) \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega, 0) \\ &= q \cdot \alpha_t^{(T)} + (1-q) \cdot \beta_t^{(T)}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_t^{(T)} := \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega, 1)$ und $\beta_t^{(T)} := \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega, 0)$. Folglich erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{(1+\rho)^{T+1}} \cdot \sum_{t=0}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T-t} \cdot ((1+\rho) \cdot \varphi_t^{(T)}(X_T)) \\ &= \frac{1}{(1+\rho)^{T+1}} \cdot (\sum_{t=0}^{T} q^{t+1} \cdot (1-q)^{T-t} \cdot \alpha_t^{(T)} + \sum_{t=0}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T+1-t} \cdot \beta_t^{(T)}) \\ &= \frac{1}{(1+\rho)^{T+1}} \cdot (\sum_{t=1}^{T+1} q^t \cdot (1-q)^{T+1-t} \cdot \alpha_{t-1}^{(T)} + \sum_{t=0}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T+1-t} \cdot \beta_t^{(T)}) \\ &= \frac{1}{(1+\rho)^{T+1}} \cdot (q^{T+1} \cdot X(1, ..., 1) + \sum_{t=1}^{T} q^t \cdot (1-q)^{T+1-t} \cdot (\alpha_{t-1}^{(T)} + \beta_t^{(T)}) + (1-q)^{T+1} \cdot X(0, ..., 0)). \end{aligned}$$

Um den Term $\alpha_{t-1}^{(T)} + \beta_t^{(T)}$ geeignet darzustellen, ist zu beachten, daß sich nach Definition von $\mathcal{G}_t^{(T+1)}$ *jedes* Element $(\omega_1, ...\omega_{T+1}) \in \mathcal{G}_t^{(T+1)}$ *entweder* als $(\omega_1, ...\omega_T, 1)$ mit $\sum_{i=1}^{T} \omega_i + 1 = t$ *oder* als $(\omega_1, ...\omega_T, 0)$ mit $\sum_{i=1}^{T} \omega_i + 0 = t$ darstellen läßt. Also ist

$$\mathcal{G}_t^{(T+1)} = \{(\omega, 1) \in \Omega_{T+1} : \omega \in \mathcal{G}_{t-1}^{(T)}\} \cup \{(\omega, 0) \in \Omega_{T+1} : \omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}\}$$

eine disjunkte Vereinigung und somit

$$\varphi_t^{(T+1)}(X) := \sum_{\widehat{\omega} \in \mathcal{G}_t^{(T+1)}} X(\widehat{\omega}) = \sum_{\omega \in \mathcal{G}_{t-1}^{(T)}} X(\omega, 1) + \sum_{\omega \in \mathcal{G}_t^{(T)}} X(\omega, 0) = \alpha_{t-1}^{(T)} + \beta_t^{(T)}.$$

Da offensichtlich $\varphi_0^{(T+1)}(X) = X(0, ..., 0)$ und $\varphi_{T+1}^{(T+1)}(X) = X(1, ..., 1)$, erhalten wir also insgesamt

$$x_0 = \frac{1}{(1+\rho)^{T+1}} \cdot \sum_{t=0}^{T+1} q^t \cdot (1-q)^{T+1-t} \cdot \varphi_t^{(T+1)}(X),$$

und der Satz ist vollständig bewiesen! □

Skriptum wird fortgesetzt, entsprechend ergänzt (auch handschriftlich) und regelmäßig bezüglich (Schreib)fehler überprüft... Kommentare sind willkommen!

FO