Die Hilbertschen Probleme

Der Mathematiker David Hilbert & seine Errungenschaften in der Mathematik

von Steffen Heinze

Inhalt

Biographie

Die Person Hilbert

Biographie

- Hilbert wurde am 23. Januar 1862 in Königsberg (Ostpreußen) geboren
- Kind einer preußischen Beamtenfamilie
- Ab 1880: Studium der Mathematik in Königsberg
- Anfang der 80er Jahre lernte Hilbert Hermann Minkowski kennen
- Hilbert bekam von Minkowski die algebraischen und analytischen Erkenntnisse von u.a. L. Kronecker und K. Weierstraß näher gebracht
- Lebenslange Freundschaft zwischen Hilbert und Minkowski

Biographie

- 1885: Promotion in Königsberg
- 1886: Habilitation Hilberts in Königsberg, dann Privatdozentur
- 1892/1893: Extraordinarius/Ordinarius (Professur)
- In dieser Zeit forschte er an der Invariantentheorie
- 1893: Hilbert heiratete Käthe Jerosch
- 1895: Berufung nach Göttingen auf Initiative von Klein
- Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Zahlkörper

Biographie

- Trotz anfänglicher Schwierigkeiten blieb Hilbert der Universität Göttingen bis zum Ende seines Schaffens treu
- Hilbert eckte mit seiner Persönlichkeit in den Universitätskreisen an, da er als Ordinarius z.B. mit seinen Assistenten in einem Lokal Billard spielte oder mit den Studenten lange Waldspaziergänge machte, auf denen sie über Mathematik und Politik diskutierten
- Hilbert liebte Gartenarbeit und zwischen dieser schrieb er an einer extra im Garten aufgestellte Tafel seine mathematischen Gedanken auf. Die Studenten durften ihn gern besuchen.

Biographie

- Um die Jahrhundertwende war Hilbert weltweit bekannt als produktiver Forscher und durch seine hervorragende Lehrtätigkeit
- Im Jahre 1900 wurde er gebeten das Hauptreferat auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris zu übernehmen
- Dort stellt er seine Liste von 23 mathematischen Problemen vor, die von enormer Wichtigkeit für die Mathematik waren bzw. sind
- Diese Liste beeinflusste die gesamte Mathematik des 20. Jahrhunderts, da sie die wichtigsten offenen Fragen der damaligen gesamten Mathematik zusammenfasste

Biographie

- Ab 1902: Untersuchung der Grundlagen der Geometrie
- Anschließend widmete er sich den Integralgleichungen und brachte seine Erkenntnisse in die mathematische Physik ein
- Anfang der 20er Jahre erkrankte er an der damals unheilbaren Anämie (Blutarmut), setze aber seine Forschung und Arbeit fort
- Hilbert konnte durch ein neues Heilmittel doch noch geheilt werden
- Bis 1930 befasste er sich mit den logischen Grundlagen der Mathematik
- Am 14. Februar 1943 verstarb David Hilbert in Göttingen

Biographie

- Hilbert war ein "reiner" Mathematiker, d.h. er ging von Problemstellungen der Mathematik aus
- Jedoch brachte er wichtige mathematische Erkenntnisse in die Physik (Spektraltheorie) und Informatik (Entscheidungsproblem) ein
- Hilbert arbeitete nacheinander in verschiedenen Gebieten der Mathematik, wodurch er die neuere Mathematik mit seiner Denkweise und seinen Ideen prägte

Bibliographie

Seine Werke

Bibliographie

- Seine wichtigsten Werke:
  - "Zahlbericht", 1899
  - "Grundlagen der Geometrie", 1899
  - "Mathematische Probleme", 1900
  - "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", 1912
  - "Methoden der mathematischen Physik", 1924
  - "Grundzüge der der theoretischen Logik", 1928
  - "Grundlagen der Mathematik", 1928
  - "Anschauliche Geometrie", 1932

Bibliographie

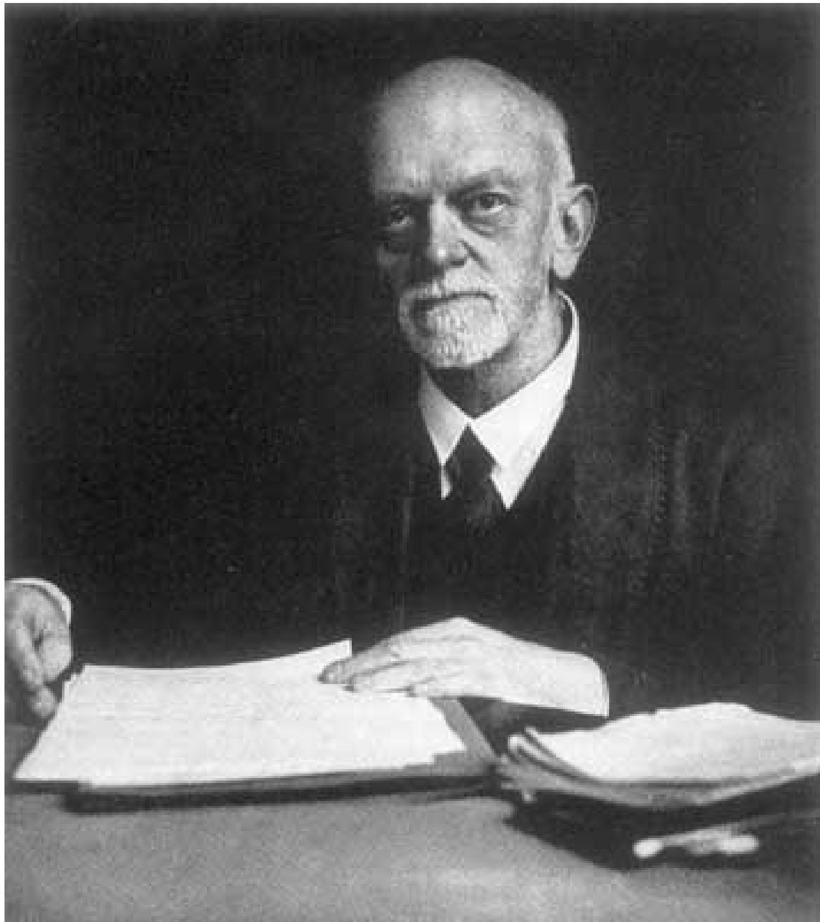
- Algebraische Geometrie
  - Beiträge zur Invariantentheorie
  - Verband Geometrie und Algebra (Hilbertscher Basissatz)
- Zahlentheorie
  - Strukturaussage für Körpererweiterungen (Hilberts Satz 90)
- Geometrie
  - Vollständiges Axiomensystem der euklidischen Geometrie (Hilberts fünf Gruppen von Axiomen)
- Logik und Grundlagen der Mathematik
  - Mathematik soll auf einem widerspruchfreien und vollständigen Axiomensystem aufgebaut werden (Hilberts Programm)

Bibliographie

- Analysis
  - Variationsrechnung
  - Entwicklung der Funktionalanalysis
- Mathematische Physik
  - Hilbert-Raum
  - partielle Differentialgleichungen
- Hilberts 23 Probleme

Hilbertsche Probleme

Die Hilbertschen
Probleme



Hilbertsche Probleme

- Anfangs des 20ten Jahrhunderts war moderne Mathematik noch wenig gefestigt; strenge Axiomatik und Worte durch Symbole zu ersetzen war noch nicht profiliert

- Wichtige mathematische Teilgebiete und Begriffe gab es noch nicht oder waren noch in ihren Anfangsphasen, wie z.B. die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, das Lebesgue-Integral, der topologische Raum und die Funktionalanalysis

Hilbertsche Probleme

- Auf dieser Basis stellte Hilbert im Jahre 1900 beim Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris seine 23 mathematischen Probleme vor

- Diese Probleme werfen Fragen zur axiomatischen Mengenlehre, Zahlentheorie, algebraischen Themen und zur Funktionentheorie auf

- Diese Probleme sind zum großen Teil gelöst worden, einige sind noch modifiziert oder verallgemeinert worden. Jedoch gibt es heute noch offene Fragen und ungelöste Probleme

Hilbertsche Probleme

- Auf Grund der Schwierigkeit und Komplexität der einzelnen Probleme wird im Weiteren nur ein Überblick über die einzelnen Probleme und deren Lösungen gegeben
- Zudem wird versucht ein einfaches Verständnis für die mathematische Problematik dem Interessenten nahe zubringen
- Es wurde probiert die Probleme als „verständliche“ Fragen zu schreiben

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums

- Problem: Gibt es eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, die in ihrer Mächtigkeit echt kleiner ist als die reellen Zahlen?

- Lösung: Gödel 1940, Cohen 1963/64:

  Die Kontinuumshypothese ist in der Zermelo-Fraenkel-Theorie *(Axiomatisierung der Mengenlehre)* formal unentscheidbar. Die Kontinuumshypothese besagt, dass alle Mengen, die nicht mehr abzählbar sind, mindestens die Mächtigkeit der reellen Zahlen besitzen

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome

- Problem: Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?

- Lösung: Gödel 1930:

  Nach dem Unvollständigkeitssatz kann diese Frage nicht nur mit Hilfe der Peano-Axiome *(Definition der Menge der natürlichen Zahlen durch Axiome)* beantwortet werden

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe

- Problem: Sind zwei beliebige Tetraeder mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen stets zerlegungsgleich oder lassen sie sich mit kongruenten Tetraedern zu zerlegungsgleichen Körpern ergänzen?
  - *(Zwei Körper heißen zerlegungsgleich, wenn der eine sich so in endlich viele Teile zerlegen lässt, dass sich die einzelnen Teile wieder zum zweiten Körper zusammenfügen lassen.)*

- Lösung: Dehn 1902: Nein.

  Man ordnet jedem Polyeder eine Zahl (Dehn-Invariante) zu. Die Dehn-Invariante ist für zwei Polyeder genau dann gleich, wenn diese zerlegungsgleich sind. Jeder Würfel besitzt die Dehn-Invariante 0, jeder regelmäßige Tetraeder eine von 0 verschiedene Dehn-Invariante.

4. Problem von der Gerade als kürzeste Verbindung zweier Punkte

- Problem: Kann man die möglichen Geometrien durch Axiomensysteme erstellen?

- Lösung: Hilberts Problem ist zu vage gestellt, um eine klare Lösung angeben zu können. Jedoch gibt es viele Ansätze und Lösungsvorschläge zu dieser Problematik.

  - *Euklidische Geometrie wird durch fünf Axiomegruppen erklärt*
  - *19. Jahrhundert: Hinzufügen und Entfernen verschiedener Axiome*
  - *„Aufstellung und systematische Behandlung der [...] Geometrien“*

5. Lies Begriff der kont. Transformationsgruppe ohne die Annahme der Diff'barkeit der die Gruppe def. Fkt.en

- Problem: Können zu einer beliebigen, lokal euklidischen, topologischen Gruppe Koordinaten so gewählt werden, dass sie die Struktur einer Lie-Gruppe besitzt?
  - *(Eine Lie-Gruppe ist eine mathematische Struktur, die in der Analysis, Geometrie und Physik zur Beschreibung von Symmetrien verwendet wird.)*
  - Andere Betrachtungsweise: Sei G Gruppe mit neutralem Element e, U offene Menge im euklidischen Raum, die e enthält und eine stetige Abbildung $F: V \times V \to U$, die auf der offenen Teilmenge V von U die Gruppenaxiome erfüllt. Die Frage ist dann, ob F auf einer Umgebung von e glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar ist.

- Lösung: Ja

  A. Gleason, D. Montgomery und L. Zippin gelang in den 1950er Jahren die endgültige Klärung des Problems, zuvor gab es nur spezielle Lösungen.

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik

- Problem: Wie kann die Physik axiomatisiert werden?
- Lösung: Unbekannt!
  - Heutzutage gibt es durch die Relativitätstheorie und die Quantenphysik wichtige Erkenntnisse über die Struktur des Universums.
  - Eine allgemeine axiomatische Formulierung der gesamten Physik ist jedoch nicht vorhanden.

7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen

- Problem: Ist die Potenz α^β immer transzendent, wenn α algebraisch ($\alpha \neq 0,1$), wenn β irrational und algebraisch ist?
  - *(Eine Zahl x heißt transzendent, wenn sie nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen (endlichen) Grades $n \geq 1$ mit ganzzahligen oder allgemein algebraischen Koeffizienten auftreten kann. Ansonsten handelt es sich um eine algebraische Zahl.)*

- Lösung: Gelfond, Schneider 1934: Ja

  Satz von Gelfond-Schneider beantwortet dieses Hilbertsche Problem.

8. Primzahlenprobleme

- Problem: Besitzen alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion den Realteil ½?

  Ist jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen darstellbar?
  - *(Zetafunktion: Für komplexe Zahlen* $s \in \mathbb{C}$*, deren Realteil größer als 1 ist, ist die Zetafunktion definiert durch* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$ *)*

- Lösung: Unbekannt!
  - *Die beiden Probleme sind als Riemannsche Vermutung und Goldbachsche Vermutung bekannt und sind zwei der populärsten ungelösten Probleme der Mathematik.*

9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper

- Problem: Wie kann das Reziprozitätsgesetz auf beliebige Zahlkörper verallgemeinert werden?
- Lösung: Nur im Abelschen Fall bekannt.
  - Das Reziprozitätsgesetz soll auf den allgemeine Zahlkörper verallgemeinert werden. Die Klassenkörpertheorie brachte den Fortschritt zur Lösung dieses Problem, jedoch gelang es E. Artin und I. Safarevic das Problem nur im Abelschen Fall zu lösen (1948). Eine weitere Verallgemeinerung auf den nicht-Abelschen Fall konnte bisher nicht erreicht werden.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung

- Problem: Wie kann man entscheiden, ob eine beliebige diophantische Gleichung in ganzen Zahlen lösbar ist?
  - *(Diophantische Gleichungen sind der Form $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, wobei f ein Polynom in mehreren Variablen ist und nur ganze Zahlen betrachtet werden.)*

- Lösung: Matiyasevich (1970): Man kann es nicht beantworten.

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten

- Problem: Wie kann die Theorie der quadratischen Formen auf beliebige algebraische Zahlkörper verallgemeinert werden?
  - *(Eine quadratische Form ist eine Funktion der Form $q(x) = x^t Ax$, wobei x ein Vektor ist und A eine symmetrische Matrix.)*

- Lösung: Im 20sten Jahrhundert entstand eine ganze Theorie zu diesem Problem. Im Zentrum steht das Lokal-Global-Prinzip, das H. Hasse 1923 formulierte.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich

- Problem: Wie lässt sich der Satz von Kronecker-Weber auf beliebige Zahlkörper verallgemeinern?
  - *(Satz von Kronecker-Weber: Die maximale Abelsche Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen entsteht durch Adjunktion aller Einheitswurzeln.)*

- Lösung: Unbekannt!
  - Viele Fortschritte, zu einer Lösung von Hilberts zwölftem Problem jedoch noch keine Lösung gefunden.

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7. Grades mittels Funktionen von nur 2 Argumenten

- Problem: Kann die Lösung der Gleichung $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ mit Hilfe einer endlichen Zahl von stetigen Funktionen konstruiert werden, die von zwei Variablen abhängen?
  - *(Gibt es stetige Funktionen in drei Variablen, die nicht als Verkettung von endlich vielen stetigen Funktionen in zwei Variablen dargestellt werden können.)*

- Lösung: Ja. A. Kolmogorow und W. Arnold konnten 1957 zeigen, dass dies in der Tat der Fall ist.

14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme

- Problem: Sind bestimmte Ringe endlich erzeugt?

- Lösung: Gegenbeispiel von Nagata 1958.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül

- Problem: Wie kann Schuberts Abzählungskalkül konkretisiert und formal begründet werden?

- Lösung: Durch die Weiterentwicklung der algebraischen Geometrie entstand das mathematische Hilfsmittel, mit dem man Schuberts Arbeit formalisieren konnte.

16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen

- Problem: Was kann über die gegenseitige Lage von algebraischen Kurven ausgesagt werden?
  - *(Algebraische Kurven sind Teilmengen der Ebene, die durch Polynomgleichungen bestimmt werden.)*

- Lösung: Viele Ergebnisse sind veröffentlich worden, jedoch bleiben immer noch viele Frage hierzu offen.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate

- Problem: Kann jede rationale Funktion, die überall, wo sie definiert ist, nichtnegative Werte annimmt, als Summe von Quadraten von rationalen Funktionen dargestellt werden?

- Lösung: Artin 1927: Ja, kann sie.

  Durch Betrachten bestimmter Klassen von Körpern konnte E. Artin mit Hilfe algebraischer Mittel das Problem lösen.

18. Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern

- Problem: Gibt es nur endlich viele wesentlich verschiedene Raumgruppen im n-dimensionalen euklidischen Raum?

- Lösung:
  - *Krystallographische Gruppen: Viele festen Stoffe besitzen auf atomarer Ebene eine kristalline Struktur. Diese lassen sich mathematisch mit Bewegungsgruppen beschreiben. L. Bieberbach zeigte, dass es in jeder Dimension nur endlich viele Raumgruppen gibt.*
  - *Fundamentalbereiche: Gibt es im 3-dimensionalen Raum Polyeder, die nicht als Fundamentalbereich einer Bewegungsgruppe auftreten, mit denen aber trotzdem der gesamte Raum lückenlos ausgefüllt werden kann? 1928 konnte K. Reinhard dies an Hand eines Beispiels beweisen.*
  - *Kugelpackungsproblem: Wie kann man am Platz sparendsten Kugeln im Raum anordnen? Kepler stellte schon 1611 die Vermutung auf, dass keine Anordnung von gleich großen Kugeln eine größere mittlere Dichte aufweist als die kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung. Erst 1998 veröffentlichte T. Hales einen computergestützten Beweis, der immer noch (2006) geprüft wird.*

19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

- Problem: Sind alle Lösungen von Lagrangefunktionen analytisch?
  - *(Lagrangefunktionen sind spezielle partielle Differentialgleichungen; oft in der Physik zu finden)*

- Lösung: Bernstein 1903, Petrovsky später: Ja, aber nur unter bestimmten Umständen. Eine Voraussetzung dafür ist, dass die dritten Ableitungen der Lösungen existieren und diese beschränkt sind.

20. Allgemeine Randwertprobleme

- Problem: Unter welchen Bedingungen besitzen Randwertprobleme Lösungen?

- Lösung: Die Existenz einer Lösung kann nicht in jedem Fall durch eine Beschränkung der Randwerte gesichert werden. Heute sind umfangreiche Resultate zum Thema anerkannt, sodass dieses Hilbertsche Problem als gelöst angesehen werden kann.

21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe

- Problem: Gibt es stets ein System von Fuchsschen Differentialgleichungen bei gegebenen Singularitäten und gegebener Monodromiegruppe?
- Lösung: Bolibruch, 1994: Nein, gibt es nicht.

22. Uniformisierung analytischer Beziehungen mittels automorpher Funktionen

- Problem: Wie können analytische Beziehungen mittels automorpher Funktionen uniformisiert werden?
  - *(Uniformisierung setzt sich zum Ziel, algebraische Kurven in zwei Variablen zu parametrisieren, d.h. die Variablen durch Funktionen zu ersetzen, die nur noch von einer veränderlichen abhängen.)*

- Lösung: Für Gleichungen mit zwei Variablen gelöst, bei mehr Variablen gibt es noch offene Fragen.
  - *(Zum Beispiel lässt sich der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ parametrisieren indem man $x=\cos(\alpha)$ und $y=\sin(\alpha)$ einsetzt)*
  - 1907 konnten Poincaré und Koebe das Problem für den Fall mit 2 Variablen allgemein lösen. Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Variablen ist jedoch bis heute nicht geklärt.

23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung

- Problem: Wie können die Methoden der Variationsrechnung weiterentwickelt werden?

- Lösung: Dieses Problem ist sehr vage gestellt, somit kann keine konkrete Lösung angeben werden.
  - Mit der Entwicklung und dem umfangreichen Ausbau der Funktionalanalysis konnten wichtige Fragen zu dem Themengebiet beantwortet werden.

Hilberts Vermächtnis

- Sein Glaube, dass man die Welt verstehen kann, spiegelt sich in seiner Grabinschrift wieder:

Wir müssen wissen,

und wir werden wissen.

Quellen:

- Yandell, B. (2002): ***The honors class: Hilbert's problems and their solvers.***, Natick, Mass.: A K Peters, Ltd.
- Reid, C. (1970): ***Hilbert*** (2. print.), Heidelberg: Springer-Verlag
- Georg-August-Universität Göttingen, Mathe. Fakultät (20.02.2002): ***David Hilbert***
  - Download (Stand 12.06.06): http://www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende_Mathematiker/hilbert.html
- Hebisch, U. (k.A.): ***Die Hilbertschen Probleme***
  - Download (Stand 12.06.06) http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/hilbertprobleme.html
- Institut für Mathematik Graz (02.02.2006): ***Hilberts Biographie***
  - Download (Stand 12.06.06): http://finanz.math.tu-graz.ac.at/~predota/old/history/mathematiker/hilbert.html

Quellen:

- Kersten, I. (2000): ***Hilberts Mathematische Probleme***
  - Download (Stand 12.06.06): http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/
- o.V. (02.06.2006): ***Hilberts Biographie***
  - Download (Stand 12.06.2006): http://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
- o.V. (27. Mai 2006): ***Hilberts Liste von 23 mathematischen Problemen***
  - Download (Stand 12.06.06): http://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Liste_von_23_mathematischen_Problemen