

## Zur Bewertung von Kreditderivaten

---

The logo for SKS, consisting of a blue rectangle above a black rectangle, with the letters 'SKS' in white.

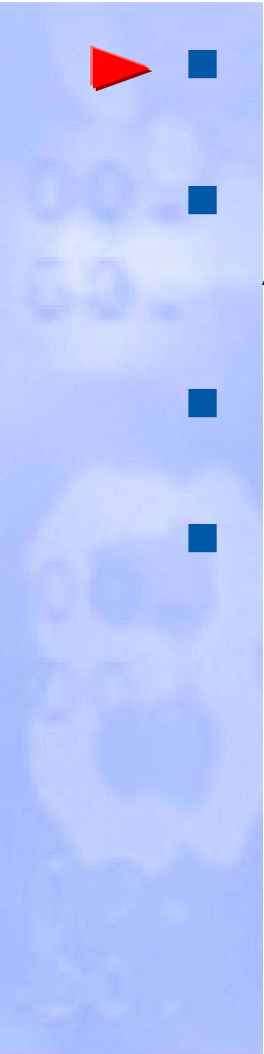
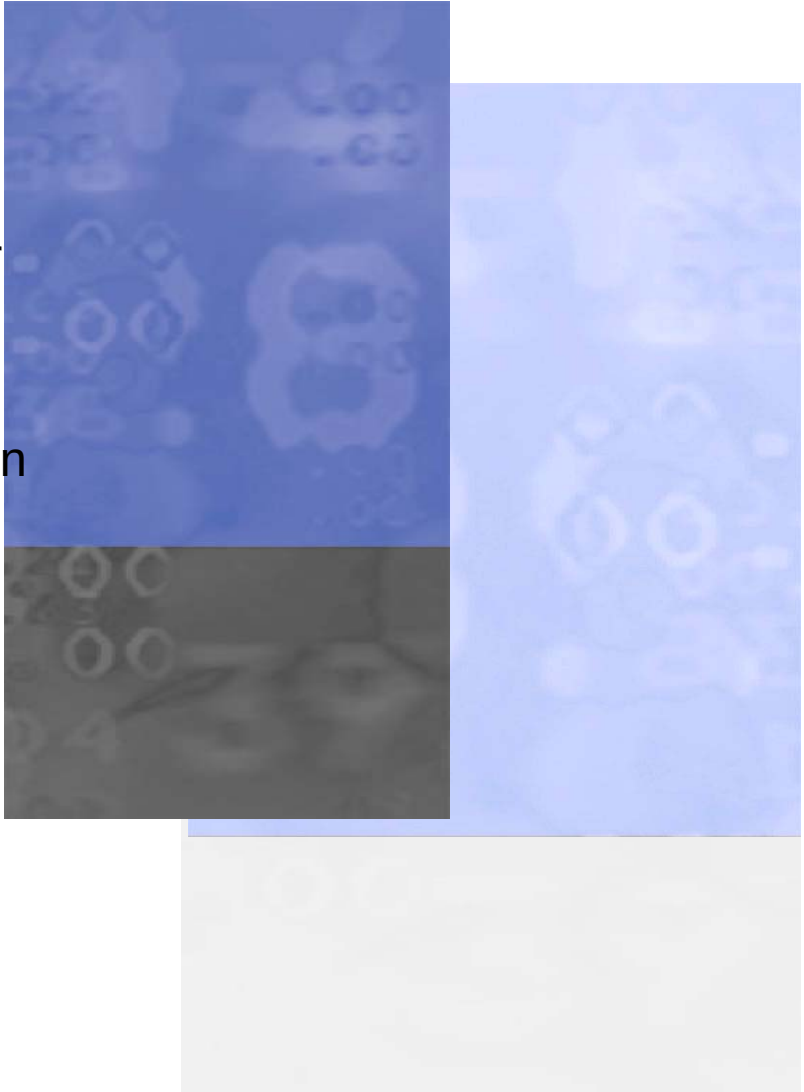
SKS

SCHWEERS, KEMPS & SCHUHMANN  
UNTERNEHMENSBERATUNG GMBH & Co. KG

---

The logo for ib-bank-systems, featuring an orange sphere above the text 'ib-bank-systems' in a blue, italicized sans-serif font.

*ib-bank-systems*

- 
- ▶ ■ Ein erster Zugang zu Kreditderivaten
  - Stochastisch-dynamische Modellierung der Ausfallzeit
  - Grundlegende Beispiele von Kreditderivaten
  - Ihre Ansprechpartner
- 

## Funktionsweise von Kreditderivaten

- Kreditderivate sind finanzielle Instrumente, durch die Kreditrisiko von einer Partei auf eine andere Partei übertragen werden kann.
- Grob gesprochen bezahlt eine Investorin einen Preis (in regelmäßigen Abständen oder im Voraus) und erhält dafür eine geeignet strukturierte Zahlung *im Falle* des Ausfalles von zugrundeliegenden Referenzfirmen.
- Vollständige Insolvenz und Zahlungsunfähigkeit sind typische Beispiele solcher Ausfälle. Im Rahmen der Bewertung von Kreditderivaten müssen wir den Begriff “Ausfall” jedoch nicht näher definieren. Es genügt dabei an ein einmaliges Ereignis zu denken, durch das (früher oder später) eine Firma in den Ruin getrieben wird ( $\rightsquigarrow$  Begriff der Ausfallzeit).

## Ein sehr einfaches Beispiel

Bereits ein festverzinsliches Wertpapier (Coupon-Bond) ist im Grunde genommen ein einfaches Kreditderivat. Als Gegenleistung zur Übernahme des Ausfallrisikos der Firma, die den Coupon-Bond emittiert, erhält der Halter des Coupon-Bonds einen Zinssatz, der höher als der risikofreie Zinssatz ist. Je höher dieses Ausfallrisiko ist, desto höher wird der Zinssatz des Coupons.

Zusätzlich dazu unterliegt ein Coupon-Bond dem Rating-Risiko (Downgrading). De facto ist also bereits ein festverzinsliches Wertpapier ein Hybrid-Derivat!



## Zwei Hauptmodelle zur stochastischen Beschreibung der Ausfallzeit

- Um die Dynamik der Ausfallzeit stochastisch zu erfassen, werden zwei Hauptmodelle verwendet: Das *formreduzierte Modell* (*reduced-form*) und das *strukturierte Modell* (*structural*). Letzteres Modell wird zu der Modellierung von Kreditderivaten eingesetzt. Das formreduzierte Modell wird hauptsächlich in der Ökonometrie verwendet.
- Strukturierte Modelle basieren auf den Informationen, die in der Bilanzdarstellung vorliegen. Das erste strukturierte Modell wurde 1974 durch Robert C. Merton eingeführt. Dabei handelt es sich um eine direkte Anwendung des Black-Scholes-Modelles zur Optionspreisbewertung, das heute als Moody's KMV-Modell in Banken implementiert ist.

## Das Modell von Merton (1974) -I

In einem einfachen einperiodischen strukturellen Modell mit endlichem Zeithorizont  $T$  wird eine Firma mit Finanzgütern  $V$ , Passiva  $B$  und Aktiva  $S$  betrachtet. Angenommen, es gelte

$$V_t = S_t + B_t \quad \forall t \in [0, T] \text{ und } V_0(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Die Firma wird bis zum Zeitpunkt  $T$  sich selbst überlassen und zu  $T$  verkauft. Dabei werden die Passiva durch einen Zero Coupon Bond (ZCB) beschrieben, der zum Zeitpunkt  $T$  verfällt und dann den Nominalwert  $F$  auszahlt. Folglich erhält eine Käuferin des ZCBs zum Zeitpunkt  $T$  den Geldbetrag

$$B_T = \min\{F, V_T\} = V_T - (V_T - F)^+,$$

wobei  $x^+ := \max\{x, 0\}$ .

## Das Modell von Merton (1974) -II

Eine betroffene Aktienbesitzerin erhält damit offensichtlich

$$S_T = V_T - B_T = (V_T - F)^+.$$

Im Modell wird - grob vereinfachend - angenommen, daß die Finanzgüter keine Dividenden auswerfen und daß der stochastische Firmenwertprozess  $V$  nur einer zeitstetigen Geometrischen Brownschen Bewegung in der risikoneutralen Welt folgt

$$dV_t = V_t(r dt + \sigma_V dW_t),$$

wobei  $r > 0$  der risikolose Zinssatz und  $\sigma_V > 0$  die *nicht-stochastisch angenommene* Volatilität darstellen. Also gilt:

$$V_t = V_0 \exp \left( (r t + \sigma_V W_t) - \frac{1}{2} \sigma_V^2 t \right) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$



## Das Modell von Merton (1974) -III

Mittels der Black-Scholes-Formel erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T] = V_0 \Phi(d+) - Fe^{-rT} \Phi(d-), \\ B_0 &= V_0 - S_0, \end{aligned}$$

wobei

$$d_{\pm} := \frac{\ln(V_0/F) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}},$$

und

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

die Verteilungsfunktion einer standard-normalverteilten Zufallsvariablen  $X \sim N(0, 1)$  beschreibt.



## Das Modell von Merton (1974) -IV

Dieses Resultat läßt sich in mehrfacher Weise nützen.

- Kennen wir beispielsweise die Anfangswerte  $S_0$  und  $B_0$ , können wir durch numerische Iteration die Aktienvolatilität  $\sigma_V$  ermitteln.
- Kennen wir umgekehrt den Aktienkurs  $S_0$  und die Aktienvolatilität  $\sigma_V$ , so können wir numerisch mittels “Rückwärtsinduktion” das obige nichtlineare Gleichungssystem nach  $V_0$  auflösen und daraus  $B_0$  und  $V_0 = B_0 + S_0$  ermitteln.

## Das Modell von Merton (1974) -V

In diesem Modell wird die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit beschrieben durch:

$$\mathbb{Q}(\text{Ausfall zu } T) = \mathbb{Q}(V_T < F) = \mathbb{Q}(W_1 < -d-) \stackrel{\checkmark}{=} \Phi(-d-).$$

Geben wir uns diese Zahl vor, können wir  $\sigma_V$  kalibrieren, um sie zu erhalten. Obwohl dieses Modell eine **fundamentale Rolle bei der Bewertung von CDO-Tranchen** spielt, handelt es sich um ein einperiodisches Modell, das uns nur obige Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $T$  liefert. Selbst verallgemeinerte Eintrittszeit-Modelle, die eine gesamte Zinskurve abbilden können, erlauben bei kurzen Laufzeiten kollabierende Spreads - im Gegensatz zur Beobachtung in der Praxis.

## Ein formreduziertes Modell für die Ausfallzeit I

Gehen wir über auf formreduzierte Modelle, also auf Modelle, in denen die Ausfallzeit einer einzelnen Firma  $\tau$  als erste Sprungzeit eines (inhomogenen) Poisson-Prozesses beschrieben wird, erkennen wir Ähnlichkeiten zwischen der stochastischen Ausfallintensität  $\lambda \geq 0$  und dem stochastischen Zinssatz  $r$  für kurzfristige Anleihen (*short rate*). Seien dazu - in der risikoneutralen Welt -  $S(0, T) := S(0, T; \mathbb{Q}) := \mathbb{Q}(\tau > T)$  die Überlebenswahrscheinlichkeit der Firma und  $P(0, T) := P(0, T; \mathbb{Q})$  der Preis eines ZCBs zu  $t = 0$ , der zur Zeit  $T$  verfällt und den Nominalwert  $P(T, T) = 1$  *sicher* auszahlt. Dann gilt:

$$S(0, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T \lambda_u du}\right]$$

und

$$P(0, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[P(T, T) \cdot e^{-\int_0^T r_u du}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du}\right].$$



## Ein formreduziertes Modell für die Ausfallzeit II

Bei einer Firma mit einem höheren Rating sollte der erwartete Ausfall später einsetzen (wenn überhaupt) als bei einer Firma, die ein tieferes Rating aufweist. Allgemeiner gilt in jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ :

$$S(t, T) := S(t, T; \mathbb{Q}) := \mathbb{Q}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t \right]$$

und

$$P(t, T) := P(t, T; \mathbb{Q}) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t \right] .$$

Dabei bezeichnet die Zufallsvariable  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z | \mathcal{F}_t]$  den bedingten Erwartungswert von  $Z$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$ , gegeben  $\mathcal{F}_t$  - die Information zur Zeit  $t$ .



## Bewertung von Anleihen mit Risiko I

Wir betrachten einen ZCB, der zur Zeit  $T$  einer Investorin  $F = 1$  Euro bezahlt, **jedoch nur dann, falls die Firma nicht vor  $T$  ausfällt**. Bei einem vorzeitigen Ausfall der Firma (also vor  $T$ ) wird der Investorin nichts ausbezahlt. Ein solches Finanzinstrument heißt *Anleihe mit Risiko*. Angenommen,  $D(t, T; \mathbb{Q})$  beschreibe den Preis dieser Anleihe in der risikoneutralen Welt, den sie zu  $0 \leq t \leq T$  besitzt. Dann gilt:

$$D(0, T; \mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{D}(T, T) \cdot e^{-\int_0^T r_u du} \right],$$

wobei  $D(T, T)$  die Auszahlung dieser Anleihe beschreibt. Nun gilt hier jedoch  **$\mathbf{D}(T, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$**  (und nicht  $D(T, T) = 1$ )! Wäre der stochastische Zinssatzprozess  $r$   $\mathbb{Q}$ -unabhängig von dem Ausfallindikatorprozess  $(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}})_{0 \leq t \leq T}$ , erhielten wir somit

$$D(0, T; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\tau > T) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T r_u du} \right] = S(0, T; \mathbb{Q}) \cdot P(0, T; \mathbb{Q}).$$

## Bewertung von Anleihen mit Risiko II

Beschreibt nun  $\lambda$  die stochastische Ausfallintensität in der risikoneutralen Welt(!), so ergibt sich aus den vorherigen Überlegungen:

$$D(0, T; \mathbb{Q}) \stackrel{(!)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T \lambda_u du} \right] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T r_u du} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T (\lambda_u + r_u) du} \right] .$$

Dieses Schlußresultat ist sogar unter Vernachlässigung der obigen Unabhängigkeitsannahme (bezüglich  $\lambda$  und  $r$ ) gültig.

Verwendet man also den neuen Zinssatzprozess

$\lambda + r = (\lambda_t + r_t)_{0 \leq t \leq T}$  anstelle von  $r = (r_t)_{0 \leq t \leq T}$ , so erhält man auf diese Weise einen ZCB, dessen Rückzahlung zu  $T$  dann jedoch *sicher* ist. Daher bezeichnet man  $\lambda$  auch kurz als *Ausfallaufschlag (default spread)*.

## Bewertung von Unternehmensanleihen I

Sei  $T > 0$ . Eine *Unternehmensanleihe* (*Corporate Bond*) bezahlt ihrer Käuferin in den  $n$  Zeitpunkten  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  jeweils einen festen Coupon der Höhe  $c$  und einen zusätzlichen Nominalwert  $F$  zu  $T = t_n$  (in einer gegebenen Währungseinheit). Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß  $F := 1$ . Fällt nun das Unternehmen vor  $T$  aus, entfallen alle darauf folgenden Couponzahlungen. Die Investorin erhält im stochastischen Ausfallzeitpunkt  $\tau$  jedoch einen Restanteil  $R$  des Nominalwerts  $F = 1$ .

Folglich ergibt sich in der risikoneutralen Welt nach den vorhergehenden Überlegungen der Preis der Unternehmensanleihe zu:



## Bewertung von Unternehmensanleihen II

$$D_{\text{Unt}}(0, T; \mathbb{Q}) = c \sum_{i=1}^n \delta_i D(0, t_i; \mathbb{Q}) + D(0, T; \mathbb{Q}) + C_R(0; \mathbb{Q}),$$

wobei  $\delta_i (\approx t_i - t_{i-1})$  den Tageszählungsanteil im Zeitintervall  $[t_{i-1}, t_i]$  beschreibt und

$$\begin{aligned} C_R(0; \mathbb{Q}) &:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ (R \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) e^{-\int_0^{\tau} r_u du} \right] \\ &\stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^T R \lambda_s e^{-\int_0^s (\lambda_u + r_u) du} ds \right]. \end{aligned}$$

$C_R(0; \mathbb{Q})$  kann also als Barwert eines ZCBs mit der stochastischen Ausfallzeit  $\tau$  als Ablaufdatum aufgefaßt werden, der  $R \mathbb{1}_{\{\tau < T\}}$  Geldeinheiten in  $\tau$  auszahlt.

## Bewertung von Credit Default Swaps (CDS) I

Im Rahmen eines CDS (zwischen zwei Beteiligten) bezahlt eine Beteiligte (die “Schutzkäuferin”) in regelmäßigen Zeitabständen einen Coupon der Höhe  $c$  einer anderen Beteiligten (der “Schutzverkäuferin”), die als Gegenleistung der Schutzkäuferin Schutz gegen den möglichen Ausfall eines Unternehmens gewährleistet (wiederum alles zusammen nur in einer Geldeinheit GE abgewickelt; also ohne implizites Währungskursrisiko). Sollte ein solcher Ausfall bereits vor dem Ablaufdatum  $T$  des CDS eintreten, bezahlt die Schutzverkäuferin der Schutzkäuferin  $1 - R$  GE zum Ausfallzeitpunkt  $\tau \leq T$ , wobei  $R$  den *Rückerstattungsanteil* (*recovery rate*) auf der vorrangigen Schuld des obigen Unternehmens bezeichne. Nach dem Ausfallzeitpunkt erfolgen keine weiteren Couponzahlungen mehr.

## Bewertung von Credit Default Swaps (CDS) II

Gemäß Konstruktion ergibt sich somit zu  $t = 0$  in der risikoneutralen Welt der Barwert des Coupon-Zahlungsstromes der Schutzkäuferin zu

$$PV_{Fix}(0; \mathbb{Q}, c) = c \sum_{i=1}^n \delta_i D(0, t_i; \mathbb{Q}) .$$

Man bezeichnet diesen Barwert auch als “Fixed Leg” oder “Coupon Leg”. Der Barwert des Zahlungsstromes der Schutzverkäuferin zu  $t = 0$  (“Floating Leg” oder “Asset Leg” genannt) ergibt sich offensichtlich zu

$$PV_{Float}(0; \mathbb{Q}) = C_{1-R}(0; \mathbb{Q}),$$

wobei  $C_{1-R}(0; \mathbb{Q})$  wie zuvor beschrieben berechnet wird.



## Bewertung von Credit Default Swaps (CDS) III

Somit ergibt sich aus Sicht der Schutzkäuferin der Gesamtwert des CDS zu

$$\begin{aligned} \text{PV}_{CDS}(0; \mathbb{Q}, c) &= \text{PV}_{Float}(0; \mathbb{Q}) - \text{PV}_{Fix}(0; \mathbb{Q}, c) \\ &= C_{1-R}(0; \mathbb{Q}) - c \sum_{i=1}^n \delta_i D(0, t_i; \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Denjenigen Couponwert  $c_{par}$  für den der Wert  $\text{PV}_{CDS}(0; \mathbb{Q}, c_{par})$  Null wird, nennt man *Pari-Aufschlag* (*par spread*). Es gilt somit

$$c_{par} = \frac{C_{1-R}(0; \mathbb{Q})}{\sum_{i=1}^n \delta_i D(0, t_i; \mathbb{Q})} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_0^T (1 - R) \lambda_s e^{-\int_0^s (\lambda_u + r_u) du} ds \right]}{\sum_{i=1}^n \delta_i D(0, t_i; \mathbb{Q})}.$$

Beispielsweise erhalten wir für nahezu konstantes  $\lambda$  als Approximation:  $c_{par} \approx \lambda(1 - R)$ .

## Weitere Kreditderivate: Ausblick in den „Abgrund“

Ohne daß wir hier zeitlich dazu in der Lage sind, auf die mathematisch *sehr* anspruchsvollen Details eingehen können, möchten wir zum Schluß folgende Instrumente erwähnen:

- Ausfall-Knockout-Optionen auf CDSs;
- Constant Maturity Default Swaps (CMDSSs);
- Index-Optionen;
- Collateralized Debt Obligations (CDOs).

Gerade bei der Bewertung der Tranchen von CDOs benötigt man ein tiefes Verständnis von der Korrelation von Ausfallereignissen in einem Portfolio von risikobehafteten Anleihen bzw. CDSs. Stichworte dazu: Copulae, Einfaktormodell, Bernoulli-Mischmodell, Loss Given Default (LGD), Gesamtportfolioverlustfunktion, Grosse Homogenportfolioapproximation - und natürlich das zu Beginn erwähnte Black-Merton-Scholes-Modell...



SCHWEERS, KEMPS & SCHUHMAN  
UNTERNEHMENSBERATUNG GMBH & CO. KG

**Dr. Frank Oertel**  
**Senior Consultant**

**Geheimrat-Hummel-Platz 4 . 65239 Hochheim am Main**

Telefon + 49. (0) 700. 3 60 17. 0 00  
Mobil + 49. (0) 162 – 286 2013  
E-Mail frank.oertel@sks-ub.de