Das Markowitz–Modell zur Bestimmung optimaler Aktienportfolios

Frank Oertel
Departement T – Mathematik und Physik
Zürcher Hochschule Winterthur (ZHW)
CH–8401 Winterthur

18. Februar 2001*

1 Zielsetzung und Modellansätze

Zielsetzung: Ein(e) Investor(in) möchte unterschiedliche Aktien so gewichten (z.B.: 30% BMW + 20% Deutsche Bank + 50% BASF), dass sie oder er

(i) mit diesem Portfolio eine möglichst hohe Rendite erzielt – bei geringstmöglichem Risiko;

(ii) die risikomindernden Diversifikationseffekte ausschöpft;

(iii) den gesamten Anlagebetrag in die Wertpapiere investiert (Budgetrestriktion).

Modellansätze:

(M1) Hoher Erwartungswert der Gesamtrendite bei möglichst geringer Varianz ("(μ, σ)–Analyse");

(M2) Bewertung der Gesamtrendite mittels der Nutzentheorie von Neumann/Morgenstern (Bernoulli - Prinzip).

Wir konzentrieren uns hier auf den Ansatz (M1) und gehen dabei von folgenden Voraussetzungen aus:

- Keine Steuern und Transaktionskosten bei Kauf und Verkauf von Wertpapieren;
- Die Kurse der Aktien werden durch einzelne Aufträge der Investoren nicht beeinflusst (auch nicht durch Grossaufträge).

*Version vom 22. März 2002;

- Anleger(innen) können *sowohl positive als auch negative Bestände* von Wertpapieren halten. Ein negativer Aktienbestand entsteht durch *Leerverkauf* (*short selling*): Ein(e) Anleger(in) verkauft ausgeliehene Aktien, obwohl sie bzw. er nicht im Besitz dieser Wertpapiere ist. Am Ende der Handelsperiode müssen jedoch diese Aktien – inklusive Leihgebühr – wieder an den Gläubiger zurückgegeben werden.

- beliebige *Teilbarkeit* der Wertpapiere; auch Bruchstücke können gehandelt werden ($\Longrightarrow$(iii))

- Gleiche Aktien haben gleiche Preise (keine Mengenrabatte)

- Investoren verhalten sich *risikoavers* und beurteilen die Portfolios ausschliesslich mittels der Parameter *Ertrag* und *Risiko:*
  - Bei gleichem Ertrag wird das Portfolio mit dem geringeren Risiko gewählt;
  - Bei gleichem Risiko wird das Portfolio mit dem höheren Ertrag bevorzugt.

2 Die (μ, σ)–Analyse und der Ansatz von Markowitz

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein fest vorgegebener Wahrscheinlichkeitsraum. In einem Portfolio bestehend aus n (risikobehafteten) Aktien, wird der Ertrag gemessen durch die jeweiligen Aktienrenditen $\mu_i := \mathbb{E}(R_i) \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$, wobei $\mathbb{E}(R_i^2) < \infty\ \forall\ i \in \{1, ..., n\}$ (d.h.: $R_i \in L^2\ \forall\ i$). Das Risiko jedes Einzeltitels messen wir mittels der *Varianz*

$$\mathrm{Var}(R_i) := \mathbb{E}((R_i - \mu_i)^2) = \mathbb{E}(R_i^2) - \mu_i^2\ \in \mathbb{R}_+$$

oder der *Standardabweichung* $\sigma(R_i) := \sqrt{\mathrm{Var}(R_i)}$ (Abweichung vom Erwartungswert im quadratischen Mittel).

Definition 2.1 *Seien $R_1, R_2, ..., R_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. R_i modelliere die Rendite der i-ten Aktie ($i = 1, ..., n$). Dann heisst jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$* PORTFOLIO *und $R(x) := \sum_{i=1}^n x_i R_i$ die* PORTFOLIORENDITE *des Portfolios x.*

Definition 2.2 *Sei $m \in \mathbb{R}$ eine beliebig vorgegebene Rendite. Ein Portfolio $x^* = x^*(m)$ heisst m–*EFFIZIENT*, falls kein Portfolio x existiert, mit*

$$\sigma(R(x)) < \sigma(R(x^*)) \text{ und } \mathbb{E}(R(x)) = m.$$

Ein Portfolio heisst EFFIZIENT*, falls es m–effizient ist für ein $m \in \mathbb{R}$. Die Menge*

$$\mathcal{E} := \{(\mathit{Var}(R(x^*)), \mathbb{E}(R(x^*))) : x^* \text{ ist ein effizientes PF}\}$$

heißt EFFIZIENZGRENZE[1].

Lemma 2.1 *$\sigma : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ X \longmapsto \sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$ ist eine Halbnorm auf dem Vektorraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

[1] Wir verwenden hier ein in der ökonomischen Literatur übliches "(σ^2, μ)–Diagramm" und nicht ein "(μ, σ^2)–Diagramm". Damit erhalten wir $\mathcal{E}$ bildlich nicht mehr als Graph einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^+$, sondern als Bild einer *Kurve* mit Werten in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (vgl. Theorem 2.1)!

Beweis: Es genügt dazu, die Dreiecksungleichung nachzuweisen. Seien $X, Y \in L^2$. Dann gilt: $\sigma^2(X+Y) = \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,|\mathrm{Cov}(X,Y)|$. Da $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\|_1 \leq \|X-\mu_X\|_2 \cdot \|Y-\mu_Y\|_2 = \sigma(X)\cdot\sigma(Y)$, folgt also insgesamt, dass $\sigma^2(X+Y) \leq (\sigma(X)+\sigma(Y))^2$. □

Korollar 2.1 (Diversifikationseffekt) *Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\sigma(R(x)) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \sigma(R_i).$$

Insbesondere ist – bei Wahl der Standardabweichung als zugrundeliegendes Risikomass – unter Ausschluss des Leerverkaufs das Risiko der Portfoliorendite $R(x)$ stets geringer als die (gewichtete) Summe aller Einzelrenditenrisiken.

Bei gegebenem Renditeniveau $m \in \mathbb{R}$, lassen sich nun alle m–effizienten Portfolios als Lösung des folgenden quadratischen Optimierungsproblems (QOM) herausfiltern:

Ansatz von Markowitz: *Konstruiere bei gegebener Rendite $m \in \mathbb{R}$ ein Portfolio $x^* = x^*(m) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\sigma^2(R(x^*)) = \mathrm{Var}(R(x^*))$ minimal wird unter den Nebenbedingungen $m = \mathbb{E}(R(x^*))$ und $\sum_{i=1}^n x_i^* = 1$!*

Dabei wird die Ertragsrestriktion gegeben durch die Bedingung $m = \mathbb{E}(R(x^*))$, und die Budgetrestriktion wird impliziert durch $\sum_{i=1}^n x_i^* = 1$.

Zur Lösung von (QOM), formen wir zunächst den Ausdruck von $\mathrm{Var}(R(x^*))$ in einfacher, jedoch sehr suggestiver Weise um – unter Verwendung der quadratischen Kovarianzmatrix:

Lemma 2.2 *Seien $R_1, R_2, ..., R_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und sei $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, wobei $c_{ij} := Cov(R_i, R_j)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$Cov(R(x), R(y)) = \langle x, Cy\rangle = x^T Cy\ .$$

Insbesondere ist $0 \leq Var(R(x)) = \langle x, Cx\rangle$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, also C eine positiv-semidefinite und symmetrische Matrix.

Setzen wir $\mu = (\mu_1, ...\mu_n)^T$ und $e = (1, ..., 1)^T$, so lässt sich (QOM) in Matrixschreibweise äqivalent umformen zu:

$$\text{Bestimme } \min\{\langle x, Cx\rangle : m = \langle x, \mu\rangle\,, 1 = \langle x, e\rangle\}\ !$$

Damit (QOM) überhaupt eine Lösung besitzt, gehen wir von folgenden Annahmen aus:

(i) C ist positiv definit: $\langle x, Cx\rangle > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
(ii) $\exists\, i \neq j \in \{1, ..., n\} : \mu_i \neq \mu_j \Leftrightarrow \mu$ und e sind linear unabhängig.

Bemerkung 2.1 *(QOM) besitzt für jede vorgegebene Rendite $m \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x^*(m)$.*

Beweis: Sei $m \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Nach Annahme (i) ist die Kovarianzmatrix C positiv definit und induziert damit durch $s_C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, Cy \rangle$ ein (weiteres) Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Insbesondere wird damit durch $\|\cdot\|_C := \sqrt{s_C(\cdot,\cdot)} = \sqrt{\langle \cdot, C \cdot \rangle}$ eine Norm (!) auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Setzen wir

$$B_m := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \mu \rangle = m\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e \rangle = 1\},$$

so folgt mittels Matrizenschreibweise

$$B_m \stackrel{!}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : Gx = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

wobei $G := \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times n; \mathbb{R})$. Nach Voraussetzung (ii) ist $rg(G) = 2$ und somit das LGS $Gx = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ universell lösbar. Also ist B_m eine nicht–leere Menge, die offensichtlich abgeschlossen ist in $\mathbb{R}^n$ (bezüglich $\|\cdot\|_C \sim \|\cdot\|$). Da trivialerweise $\{0\}$ eine kompakte Menge ist, erhalten wir damit die Existenz eines Elementes $x^* = x^*(m) \in B_m$, mit $\|x^*\|_C = \inf\{\|x\|_C : x \in B_m\}$. □

Spätestens an dieser Stelle erkennen wir erneut sehr deutlich die Faszination und Kraft der Mathematik. Es zeigt sich, wie durch den Einfluss der Kovarianzmatrix C eine ursprünglich wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellung (in der eine Varianz bei gegebenem Erwartungswert minimiert werden soll) in eine rein geometrische Fragestellung transformiert wird, in der es darum geht, den kleinsten Abstand zu ermitteln, den der Nullpunkt zu einer abgeschlossenen Menge in einem endlichdimensionalen Hilbertraum besitzt! Für diesen Abstand – der ja durch C induziert wird – bezahlt man jedoch den Preis, dass man als zugrundeliegendes *Risikomass* "nur" die *Varianz* der Portfoliorendite in Betrachtung zieht, wodurch realistischere Risikomasse, wie beispielsweise Mean–Absolute Deviation (MAD), Value–at–Risk (VaR), Expected Shortfall (ES), etc., damit zunächst vernachlässigt werden. Die geometrische Struktur der Varianz der Portfoliorendite widerspiegelt sich in Lemma 2.2.

Zur expliziten Lösung von (QOM) benutzen wir nun die *Lagrangesche Multiplikatorenregel* und betrachten die folgenden glatten Funktionen $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \langle x, Cx \rangle$, $g_1(x) := \langle x, \mu \rangle - m$ und $g_2(x) := \langle x, e \rangle - 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Setzen wir $g := (g_1, g_2)^\top$, so errechnet sich das Differential Dg an der Stelle x^* zu:

$$Dg(x^*) = G = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} .$$

Also existiert nach Voraussetzung (ii) eine 2-reihige Unterdeterminante von $G = Dg(x^*)$, die nicht verschwindet, und die Voraussetzungen des Satzes von Lagrange sind somit erfüllt. Folglich existieren Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass:

$$\nabla f(x^*) + \alpha \cdot \nabla g_1(x^*) + \beta \cdot \nabla g_2(x^*) = 0 ,$$

also

$$2Cx^* + \alpha\mu + \beta e = 0.$$

Da positiv definite Matrizen stets invertierbar sind (ihr Kern besteht nur aus dem Nullelement), existiert also C^{-1}, und wir erhalten

$$2x^* = -\alpha(C^{-1}\mu) - \beta(C^{-1}e).$$

Beachten wir nun die Randbedingungen $\langle x^*, \mu\rangle = m$ und $\langle x^*, e\rangle = 1$, so folgt (durch Bildung der jeweiligen Skalarprodukte), dass $2m = -\alpha \langle C^{-1}\mu, \mu\rangle - \beta \langle C^{-1}e, \mu\rangle$ und $2 = -\alpha \langle C^{-1}\mu, e\rangle - \beta \langle C^{-1}e, e\rangle$. Setzen wir nun $a := \langle C^{-1}e, e\rangle$, $b := \langle C^{-1}\mu, e\rangle = \langle C^{-1}e, \mu\rangle$ und $c := \langle C^{-1}\mu, \mu\rangle$, so erhalten wir damit also das LGS

$$\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wegen (i) und (ii) ist $a > 0$, $c > 0$ und auch $\Delta := ac - b^2 > 0$. [2] Also besitzt das LGS (1) die eindeutig bestimmte Lösung $\alpha = \dfrac{2b - 2am}{\Delta}$ und $\beta = \dfrac{2bm - 2c}{\Delta}$, und

$$x^* = x^*(m) = \frac{c - bm}{\Delta}C^{-1}e + \frac{am - b}{\Delta}C^{-1}\mu \tag{2}$$

das gesuchte m-effiziente Portfolio. Wir erhalten somit nach einer kleinen Rechnung für die Varianz $v(m) := \mathrm{Var}(R(x^*(m)))$:

$$\begin{aligned} v(m) &= f(x^*(m)) = \langle x^*(m), Cx^*(m)\rangle = \frac{a}{\Delta}m^2 - \frac{2b}{\Delta}m + \frac{c}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta a}(am - b)^2 + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} \quad \forall\, m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bildlich betrachtet, ist der Graph der Funktion $\mathbb{R} \ni m \mapsto v(m) \in [\frac{1}{a}, \infty)$ eine Parabel, mit lokalem (sogar globalem) Minimum $\frac{1}{a}$ im Punkt $m = \frac{b}{a}$. Beachten wir obige Definition der Effizienzgrenze, so folgt also nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(v(m), m) : m \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a}(am - b)^2, m) : m \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch

$$x^*_{\min} := x^*(\frac{b}{a}) = \frac{1}{a}C^{-1}e$$

dasjenige effiziente Portfolio, *dessen Rendite* $R(x^*_{\min})$ *unter den Renditen aller effizienten Portfolios die kleinste Varianz besitzt*:

$$\mathrm{Var}(R(x^*_{\min})) = v(\frac{b}{a}) = \frac{1}{a} \leq \mathrm{Var}(R(x^*(m))) \;\; \forall m \in \mathbb{R}.$$

In der Literatur wird dieses Portfolio $x^*_{\min}$ oft als MINIMALVARIANZPORTFOLIO (MVP) bezeichnet. Setzen wir $x^*_{\min}$ in (2) ein, so folgt für alle $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^*(m) &= \frac{ac - abm}{\Delta}\, x^*_{\min} + \frac{am - b}{\Delta}\, C^{-1}\mu \\ &= (x^*_{\min} + \frac{b - am}{\Delta}\, bx^*_{\min}) + \frac{am - b}{\Delta}\, C^{-1}\mu \\ &= x^*_{\min} + \frac{am - b}{\Delta}\, z^*, \end{aligned} \tag{3}$$

[2] Man wende dazu auf das Skalarprodukt $s_C(x, y) = \langle x, Cy\rangle$ die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung an!

wobei $z^* := C^{-1}\mu - b \cdot x^*_{\min} = C^{-1}\mu - \frac{b}{a}C^{-1}e$. Also liegt jedes effiziente Portfolio auf der *Geraden*

$$\Gamma := \{x^*_{\min} + \tau \cdot z^* \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Gibt es nun Punkte auf dieser Geraden, die keine effizienten Portfolios sind? Die Antwort lautet nein. Denn, sei $x \in \Gamma$ beliebig. Dann existiert ein $\tau \in \mathbb{R}$, so dass $x = x^*_{\min} + \tau \cdot z^* \stackrel{!}{=} x^*(\widetilde{m})$, mit $\widetilde{m} := (\tau\Delta + b)/a$. Offensichtlich ist $\langle x^*(\widetilde{m}), \mu\rangle = \widetilde{m}$ und $\langle x^*(\widetilde{m}), e\rangle = 1$ und also $x = x^*(\widetilde{m})$ ein effizientes Portfolio.

Fassen wir die letzten Überlegungen zusammen, so haben wir folgenden Satz bewiesen:

Theorem 2.1 *Seien $R_1, R_2, ..., R_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $C = (Cov(R_i, R_j))_{1 \le i,j \le n}$ die Kovarianzmatrix. Sei C positiv definit, und $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)^T := (\mathbb{E}(R_1), ...\mathbb{E}(R_n))^T$ enthalte zwei verschiedene Komponenten. Weiter seien $e := (1, ...1)^T$, $a := \langle C^{-1}e, e\rangle$, $b := \langle C^{-1}\mu, e\rangle$, $c := \langle C^{-1}\mu, \mu\rangle$ und $\Delta := ac - b^2$.*

(i) Dann ist $a > 0, c > 0$ und $d > 0$, und durch

$$x^*_{\min} := \frac{1}{a}C^{-1}e$$

wird das Minimalvarianzportfolio gegeben.

(ii) Die Menge aller effizienten Portfolios wird beschrieben durch die Gerade

$$\Gamma := \{x^*_{\min} + \tau \cdot z^* \ : \ \tau \in \mathbb{R}\},$$

wobei $z^* := C^{-1}\mu - \frac{b}{a}C^{-1}e$.

(iii) Die Effizienzgrenze $\mathcal{E}$ wird gegeben durch

$$\mathcal{E} = \{(\frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a}(am - b)^2, m) : m \in \mathbb{R}\}.$$

Trotz der hohen Bedeutung des Markowitz–Modells für die Praxis, für die Harry Max Markowitz 1990 mit dem Nobelpreis gewürdigt wurde, ergibt sich trotzdem ein nicht zu unterschätzender Nachteil in diesem Modell durch die implizite Annahme, daß das Risiko der Portfoliorendite $R(x)$ allein durch Bestimmung des Erwartungswertes $\mathbb{E}(R(x))$ und der Varianz $\mathrm{Var}(R(x))$ erfasst wird, also die Portfoliorendite als *normalverteilte Zufallsvariable* betrachtet wird (bzw. die Investoren eine quadratische Nutzenfunktion als Präferenz zugrundelegen). Bestimmte Portfoliostrukturen der Praxis zeigen jedoch, dass dies im allgemeinen nicht der Fall ist (beispielsweise Rückversicherungsportfolios).

Literatur

[C–W] D. G. Luenberger, *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.

[P] H. H. Panjer, editor: P. P. Boyle et al., *Financial Economics*, The Actuarial Foundation, 1998.

[S–U] P. Steiner und H. Uhlir, *Wertpapieranalyse*, Physica–Verlag Heidelberg, 1991.